Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

63e jaargang
1987 | 1988
mei

Euclides 8

Wolters-Noordhoff

Euclides

Redactie

Drs H. Bakker
G. Bulthuis
W. M. J. M. van Gaans
Drs M. C. van Hoorn (hoofdredacteur)
Drs C. G. J. Nagtegaal
Drs A. B. Oosten (eindredacteur)
P. E. de Roest (secretaris)
Ir. V. Schmidt
Mw. H. S. Susijn-van Zaale
Dr. P. G. J. Vredenduin (penningmeester)
A. van der Wal

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-2 34 17.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt *f* 55,– per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 37,50; contributie zonder Euclides *f* 30,–.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij drs M. C. van Hoorn, Postbus 9025, 9703 LA Groningen. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1½, bij voorkeur op Euclides-kopijbladen. De redactiesecretaris P.E. de Roest, Blijhamsterweg 94, 9672 XA Winschoten, tel. 05970-2 20 27 stuurt desgevraagd kopijbladen met gebruiksaanwijzing toe. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Boeken ter recensie aan Drs H. Bakker, Jan Steenlaan 11, 8932 EA Leeuwarden, tel. 058-13 59 76.

Inlichtingen over en opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan F. M. W. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland.
Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 48,75. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f* 29,50.
Niet-leden kunnen zich abonneren bij:
Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86. Giro: 1308949.
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers *f* 8,25 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:
Intermedia bv, Postbus 371, 2400 AJ Alphen a/d Rijn.
Tel. 01720-6 20 78/6 20 79. Telex 39731 (Samsy).

ISSN 01.65-0394

Hewet en toets

W. H. V. de Goede

De uitwerking van de doelstellingen van HEWET heeft, zoals bekend, geleid tot opvattingen omtrent het vak Wiskunde A die uiteenlopen van

- 'Wiskunde A is toegepaste wiskunde en als zodanig in zeker opzicht moeilijker dan Wiskunde B, want door de contexten en open vraagstelling moet er worden nagedacht!'

tot

- 'Wiskunde A is geen wiskunde, typisch een vak voor kneusjes!'

Ten aanzien van het onderdeel Ruimtemeetkunde in Wiskunde B was de HEWET-commissie wat explicieter in haar doelstellingen en daarom, maar vooral ook vanwege de zeer ver uiteenlopende meningen over Wiskunde A is het wellicht interessant om de eerste 'echte' examens in deze vakken eens onder de loep te nemen.
Beginnen wij met Wiskunde A; om te kunnen verwijzen noem ik voor het gemak de eerder vermelde opvattingen respectievelijk I en II.

Opgave 1

Een boer heeft 22 ha bouwland.
Het komend jaar zullen hierop aardappelen, erwten en graan geteeld worden.
De te verwachten opbrengst is 60 ton aardappelen per ha, 40 ton erwten per ha, 50 ton graan per ha.
De te verwachten winst per ton is voor aardappelen *f* 70,–, voor erwten *f* 75,– en voor graan *f* 90,–.

a. De boer wil 6,5 ha voor aardappelteelt bestemmen, 7,1 ha voor erwtenteelt en 8,4 ha voor graanbouw.
Bereken de winst die in totaal te verwachten is.

De oogsttijden voor de diverse gewassen vallen na elkaar. Elk gewas moet in een periode van 5 dagen geoogst worden, waarbij 8 uren per dag wordt gewerkt.
Hierbij gelden de volgende voorwaarden:

gewas	oogst-periode	benodigd aantal arbeidsuren per ha	beschikbaar aantal oogsters
graan	I	10	3
erwten	II	15	2
aardappelen	III	12	2

b. Is de keuze die de boer in opgave a. gedaan heeft onder deze voorwaarden uitvoerbaar?
Licht het antwoord toe.

Stel dat x ha voor aardappelteelt bestemd wordt en y ha voor erwtenteelt, terwijl de rest van het land wordt gebruikt voor graanbouw.

c. Geef de beperkende voorwaarden voor x en y.
Teken in een rechthoekig assenstelsel Oxy het gebied waarin aan de gestelde voorwaarden wordt voldaan.

d. Bij welke waarden van x en y is de te verwachten winst maximaal?
Bereken deze te verwachten winst.

e. In welke periode hebben de oogsters in de situatie van onderdeel d. nog arbeidsuren over voor andere activiteiten?
Bereken dit aantal arbeidsuren.

Een standaard LP-sommetje in de gebruikelijke context (Opvatting II). Een door de CEVO goed gekozen beginopgave van het examen; door de verandering van volgorde in de tabel ten opzichte van de tekst moet de kandidaat toch even uitkijken (Opvatting I).

Opgave 2

In een laboratorium onderzoekt men een aantal exemplaren van een levend organisme. Elk exemplaar daarvan bevindt zich in toestand A of in toestand B en elk van deze toestanden duurt ongeveer vier uren, tenzij het exemplaar voortijdig dood gaat.
Bij een onderzoek van 175 exemplaren kwam men tot het volgende resultaat:
Van de 99 exemplaren in toestand A waren er na vier uren 20 doodgegaan; de andere 79 waren overgegaan naar toestand B.
Van de 76 exemplaren in toestand B waren er na vier uren geen meer over; ze hadden wel 118 nakomelingen in toestand A voortgebracht.

a. Geef dit resultaat weer in een graaf en stel een twee bij twee matrix M op voor een tijdseenheid van vier uren; geef hierbij de elementen van M in twee decimalen nauwkeurig.

b. Toon aan dat per acht uren de groeifactor in twee decimalen nauwkeurig 1,24 is.

Neem in het volgende aan dat per acht uren de groeifactor precies 1,24 is.
Per acht uren is de verhouding tussen het aantal exemplaren in toestand A en het aantal exemplaren in toestand B constant.
Indien deze verhouding ook per vier uren nagenoeg constant is, spreekt men van een stabiele samenstelling.

c. Men weet dat er sprake is van een stabiele samenstelling als men uitgaat van een beginstadium met 84 exemplaren in de ene

toestand en 116 exemplaren in de andere toestand.
Welk aantal exemplaren bevindt zich dan in toestand A?

Om experimenten met deze soort organismen te doen, wordt een populatie aangehouden die bestaat uit 100 exemplaren in een stabiele samenstelling.
Elk etmaal stuurt men zoveel exemplaren voor experimenten naar het laboratorium dat men er weer 100 over houdt voor verdere kweek.

d. Bereken het aantal exemplaren dat dan per etmaal voor onderzoek beschikbaar komt.

Een onderzoeker beschikt over een stabiele populatie van 60 exemplaren, maar hij heeft er 200 nodig. Omdat er niet meer exemplaren beschikbaar zijn, besluit hij met zijn experiment te wachten tot zijn populatie is uitgegroeid tot 200 exemplaren.

e. Bereken het aantal uren dat hij hierop wachten moet (in gehele uren nauwkeurig).

Bij deze opgave vind ik het al veel minder gemakkelijk opmerkingen te ventileren die zonder meer bij de extreme opvattingen I en II passen. De CEVO heeft hier kennelijk geprobeerd een paar standaardtopics uit het A-programma te combineren en men kan zeggen dat zij daarin redelijk is geslaagd. Maar de formulering van de opgave laat beslist te wensen over. In de praktijk van de wiskundige consultatie is het ruwweg zo dat de toegepast wiskundige met zijn klant het probleem nauwgezet doorspreekt. In interviews dwingt hij de klant tot een precieze formulering van zijn vragen, een precieze omschrijving van zijn data en van de wijze waarop deze zijn verkregen, enzovoorts. Vervolgens wordt een en ander in een wiskundig model gegoten, de modelveronderstellingen worden weer in overleg met de klant gedaan en tenslotte wordt er over de oplossing nagedacht. Deze gang van zaken zou in een Wiskunde A-probleem zo'n beetje moeten worden geïmiteerd en dan wordt het moeilijk (Opvatting I).
Deze moeilijkheden blijken direct in de vraagstelling. Ik moet *een* graaf tekenen die *dit* resultaat weer geeft (welk resultaat?) en *een* twee bij twee matrix opstellen (waarvan?), vervolgens is er sprake van *de* groeifactor (waarvan?) enzovoorts.
Op deze manier wordt er veel te duidelijk geleund op veronderstelde kennis van standaardtheorie terwijl in het vervolg van de opgave een nieuw begrip 'stabiele samenstelling' een rol gaat spelen. Tenslotte ontaardt een en ander in wat gereken met exponenten en logaritmen (Opvatting II).

Opgave 3

In 1787 en 1788 schreven Alexander Hamilton en James Madison de zogenaamde *The Federalist* papers om de inwoners van New York te overreden de Constitutie te ratificeren. Beide schrijvers ondertekenden met 'Publius'.
Van 48 van deze teksten is bekend dat zij van Hamilton zijn en van 50 dat zij van Madison zijn. Om ook van de overige teksten de auteur te achterhalen, heeft men van diverse woorden geteld hoe vaak ze in een tekst van Hamilton voorkomen en hoe vaak in een tekst van Madison. Voor elk van die teksten heeft men daarna de frequentie per 1000 woorden berekend.
Dit heeft men onder andere gedaan voor het woordje '*by*'.
Het resultaat is weergegeven in onderstaande histogrammen.
(Zie figuur 1)

a. Verwerk deze gegevens, zowel voor Hamilton als voor Madison, op normaal-waarschijnlijkheidspapier.
Neem aan dat men mag concluderen dat de frequenties normaal verdeeld zijn. Geef dan in beide gevallen het gemiddelde en de standaarddeviatie.

Van een ander woord weet men dat dit bij Hamilton per 1000 woorden voorkomt met een gemiddelde van 17,2 en een standaarddeviatie van 4,1. Men mag weer aannemen dat de frequenties normaal verdeeld zijn.
Voor Madison zijn deze gegevens niet bekend.
Bij een gegeven tekst vindt men onder de eerste 1000 woorden dit woord 24 maal.

b. Onderzoek of men bij een significantieniveau* van 5% voldoende reden heeft te twijfelen aan het auteurschap van Hamilton.

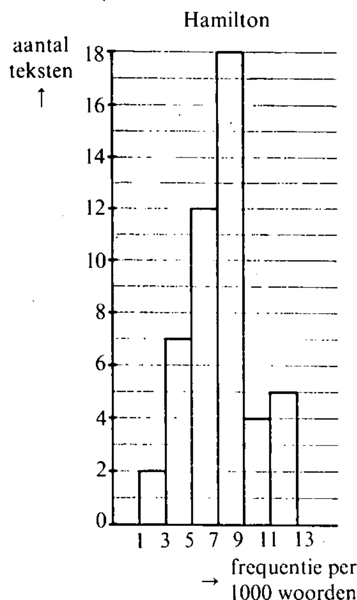
Om een grotere nauwkeurigheid te bereiken, kijkt men nu naar de eerste 4000 woorden van die tekst. Het gezochte woord blijkt hierbij 86 maal voor te komen.

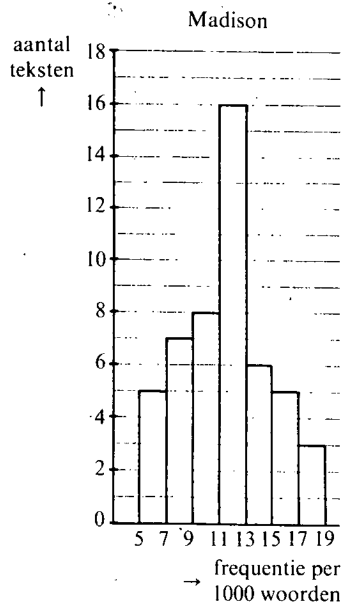
c. Onderzoek of men nu bij een significantieniveau van 5% voldoende reden heeft te twijfelen aan het auteurschap van Hamilton.

Een andere tekst heeft men op 20 woorden onderzocht. Op grond daarvan heeft men 15 maal gekozen voor Hamilton als auteur en 5 maal voor Madison als auteur.

d. Onderzoek of men hieruit met een significantieniveau van $2\frac{1}{2}$% mag besluiten dat Hamilton de schrijver was.

Ah, in eerste instantie gaat hier het hart van de statisticus sneller kloppen: een relevant probleem in een mooie context. Er zijn twee mogelijke populaties, van beide zijn ongeveer evenveel individuen voor referentie voorhanden en individuen waarvan de herkomst onbekend is moeten worden geclassificeerd. Maar dan?
Enig geklungel met methoden uit het rekenlineaaltijdperk, gevolgd door het opzoeken van drie kansjes in tabellen (Opvatting II).





Figuur 1

Een slecht geformuleerde en methodologisch nogal dubieuze aanpak van dit mooie probleem (Opvatting I).

Enige bezwaren van technische aard:

Er worden twee verschillende definities van het begrip 'frequentie woord ... per 1000 woorden' gehanteerd: In de a-vraag om teksten te karakteriseren, dat wil zeggen neem een tekst van deze of gene, tel het totaal aantal woorden en ook het aantal keren dat woord ... voorkomt, reken vervolgens de frequentie per 1000 uit. (Uit hoeveel woorden bestaan deze teksten zoal? Bestudeer ik hier nu nog wel een discrete variabele in de gewone zin?). In de histogrammen blijkt dat deze frequentie per tekst kan verschillen.

Vervolgens wordt het begrip gebruikt om een schrijver te karakteriseren, dat wil zeggen neem aselect een stuk van 1000 woorden van deze schrijver en tel het aantal keren dat woord ... voorkomt (een duidelijk discrete variabele, denk om de continuïteitscorrectie, jongens, want daar staat men op). Dit aantal is bij benadering normaal verdeeld met enzovoorts.

Misschien kan men deze verschillende begrippen nog wel rijmen, maar er is meer:

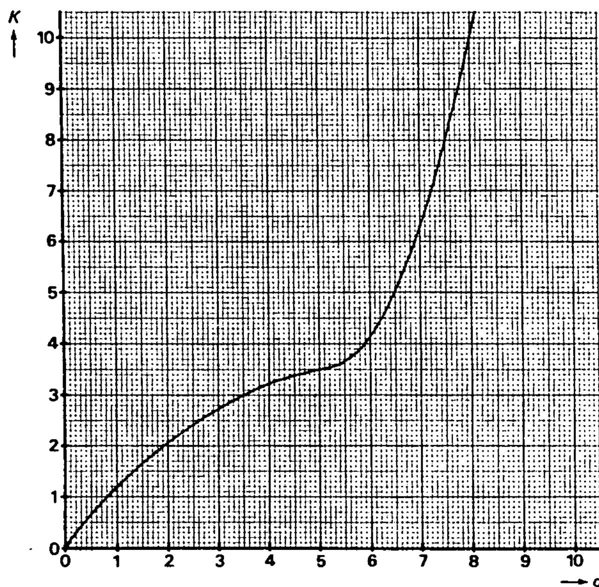
In de inleiding van de b-vraag lees ik: 'Voor Madison zijn deze gegevens niet bekend.' Goed, dat betekent dus tweezijdig toetsen, maar als nu voor Madison deze verdeling ook normaal met gemiddelde 17.2 is, wat ben ik dan aan het doen?

Bij vraag c kijk ik naar 4000 opeenvolgende woorden, kan ik dan nog wel onafhankelijkheid veronderstellen? Eenzelfde onafhankelijkheidsveronderstelling moet ik ook in vraag d doen, kan dat zomaar?

En waarom is de vraagstelling in vraag d zo suggestief eenzijdig, terwijl het een duidelijk tweezijdig probleem is? Is de symmetrische begintoestand die voor de tekentoets nodig is een gevolg van de 48 bekende Hamilton teksten en de 50 bekende Madison teksten?

Kortom, hier zien wij weer duidelijk geïllustreerd dat echt relevant toegepast wiskundige problemen ook meteen echt moeilijk zijn en deskundigheid vereisen. De CEVO heeft een mooie aanzet gegeven en doet er goed aan de ingeslagen weg te vervolgen: toegepaste waarschijnlijkheidsrekening en statistiek in optima forma in plaats van vazen met k^2 gekleurde dobbelstenen erin of politieagenten die op kruispunten met een dobbelsteen beslissen welke kant zij op zullen gaan. Wel verdient het aanbeveling de opgaven tevoren door een deskundige te laten screenen op methodologische missers.

Opgave 4



Figuur 2

In een bedrijf worden kurketrekkers gefabriceerd.
De totale kosten bij de produktie kan men aflezen in bovenstaande grafiek. *(Zie figuur 2)*
Een wiskundige van het bedrijf heeft hierbij de volgende formules bedacht:

$K = -0{,}1q^2 + 1{,}2q$ als $0 \leqq q < 5$
$K = 0{,}1q^3 - 1{,}1q^2 + 3{,}7q$ als $q \geqq 5$.

Hierbij is q de produktie (in duizendtallen) en K de totale kosten (in duizenden guldens).

a. Toon aan dat volgens deze formules er bij $q = 5$ geen 'sprong' en geen 'knik' in de grafiek zit.

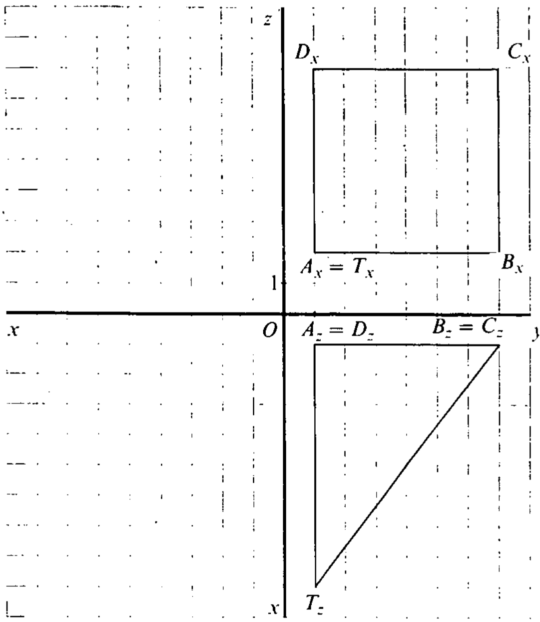
De toename van de totale kosten bij een toename van de produktie met één kurketrekker noemt men de marginale kosten.
De marginale kosten mogen benaderd worden door $\frac{dK}{dq}$.

b. Toon door berekening aan dat de marginale kosten bij elke produktie positief zijn.
Hoe is dit ook uit de grafiek af te leiden?
c. Toon door berekening aan dat de marginale kosten het kleinst zijn voor $q = 5$.
Hoe is dit ook uit de grafiek af te leiden?
d. Bereken de gemiddelde totale kosten per kurketrekker bij een produktie van 7000 stuks.
Hoe kan men uit de grafiek afleiden bij welke andere produktie de gemiddelde totale kosten per kurketrekker even groot zijn als bij een produktie van 7000 stuks?
Leid deze andere produktie uit de grafiek af en controleer het antwoord de formules.

Dit is nu wat ik bedoel (Opvatting II).
De context is wat arm en speelt nauwelijks een rol, maar het analyseprogramma in Wiskunde A beslaat een flink stuk techniek (tot en met het differentiëren van afzichtelijk samengestelde functies toe) en het kan geen kwaad om de kennis van dit onderdeel in een eenvoudig regressiemodel te toetsen (Opvatting I).

Nu eerst naar het Wiskunde B examen. Hier is alleen de (meetkunde-)opgave 4 interessant, de overige opgaven zijn de obligate Wiskunde I sommen die wij allemaal al jaren kennen.
In het HEWET-rapport lezen wij dat de *meetkundige* vorming van de leerling zal worden benadrukt en met name het *ruimtelijk inzicht* moet worden ontwikkeld.
Wel, laten wij eens kijken:

4. Van de piramide $T.ABCD$ zijn hieronder de loodrechte projecties op het Oxy-vlak en het Oyz-vlak getekend.
Voor elk punt P is P_x de projectie op het Oyz-vlak, P_y de projectie op het Oxz-vlak en P_z de projectie op het Oxy-vlak.
a. V is het vlak door A dat loodrecht staat op de ribbe TB.
Neem onderstaande figuur over en teken daarin de loodrechte projecties op de drie coördinaatvlakken van de doorsnede van V en de piramide.
b. Bereken in graden nauwkeurig de hoek van de vlakken TBC en TCD.
c. Bewijs dat de punten A, B, C, D en T op één bol liggen.
Bereken de straal van deze bol.
(Zie figuur 3)



Figuur 3

De openingsbewering van de opgave lijkt mij met de gangbare opvattingen omtrent piramides en orthogonale projecties onwaar: De projectie van ribbe TC op het Oyz-vlak ontbreekt in de tekening. Zou dit opzet zijn om het ruimtelijk inzicht te toetsen?
Verder is de a-vraag inderdaad nieuw, er moet worden getekend. Maar waarom zo tijdrovend een hele figuur overnemen in plaats van een werkblad erbij geven?
De b-vraag kan rechtstreeks uit een havo-examen overgenomen zijn en gezien het antwoordmodel was het ook de bedoeling de bijbehorende vaardigheden te toetsen:

b. 8 punten;	voor een normaalvector van TBC is $\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$	3 punten
	voor een normaalvector van TDC is $\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$	3 punten
	voor het antwoord 69°	2 punten

Analytisch gezien is de hoek van de beide vlakken inderdaad scherp (kwestie van absoluutstrepen in de formule zetten, jongens), maar meetkundig gezien maken de vlakken in de piramide een stompe hoek met elkaar. Waarom is een antwoord dat in HEWET-meetkunde-zin goed is volgens het antwoordmodel fout?

Ook in de c-vraag wordt, gezien het antwoordmodel merendeels het analytische rekenwerk van de kandidaat gehonoreerd:

c. 6 punten;	voor A, B, C en D liggen op één cirkel	1 punt
	voor de rest van het bewijs	1 punt
	voor het middelpunt van de bol geldt $x = 5$, $y = 4$ en $z = 5$	3 punten
	voor de straal $\sqrt{34}$	1 punt

Is dit wel meetkunde in HEWET-zin? Mijns inziens niet.
De CEVO zal in de toekomst moeten proberen echte meetkundeopgaven te produceren, dat wil zeggen: opgaven waarbij gebruik van meetkundige methoden wordt getoetst en niet zoals nu in de eerste instantie analytische vaardigheden.

Keren wij nog even terug naar Wiskunde A. Het examen overziende zullen aanhangers van de extreme opvattingen I en II met hun mening wat meer naar het midden moeten verschuiven, waar zoals men weet de waarheid ligt.
De CEVO heeft met dit examen het vak heel behoorlijk gestalte gegeven; nu de gelaatstrekken nog, dat wil zeggen: Veel preciezere formuleringen, uitgebreider vooral ook, werkbladen erbij (zie bijvoorbeeld de Natuurkunde- of Economie-examens) en waar de deskundigheid binnen de commissie tekort schiet niet schromen buitenstaanders te consulteren, want methodologisch moet het wel kloppen!

Wiskunde moet je doen!

Truus Dekker, Sylvia van der Werf

Op 21 maart 1987 vierde de werkgroep 'Vrouwen en Wiskunde' haar eerste lustrum met een studiedag. Speciaal voor deze dag werd door de leden van de werkgroep een serie lespakketjes ontworpen met als thema de beeldvorming rond wiskunde. Ze wilden hiermee laten zien dat wiskunde overal te vinden is, dat samen wiskunde doen gewoon leuk kan zijn en dat je vaak meer van wiskunde weet en in de praktijk gebruikt dan je denkt.

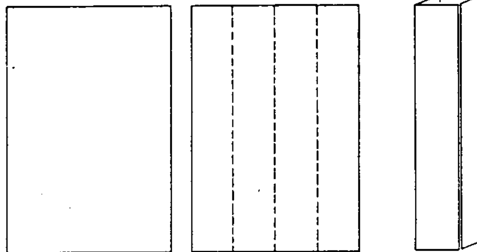
Naar aanleiding van de lustrumdag werd ook de videoproduktie 'Wiskunde moet je doen!' gemaakt. Hierop is o.a. te zien hoe een grote groep vrouwen met de genoemde lespakketjes bezig is.

Verder was het de bedoeling de lespakketjes te gebruiken voor groepen die 'een avondje wiskunde' willen doen. Om kennis te maken met de 'dagelijkse' kant van dit vak, om samen te praten over de wiskunde zoals die nu op de scholen wordt onderwezen en om het beeld van wiskunde als een saai en moeilijk vak, te veranderen.
Inmiddels is de eerste van dit soort bijeenkomsten gehouden in het vrouwentrefcentrum 'Evalleen' te Nieuwerkerk aan de IJssel. Het was een open thema-avond waar men zich niet van tevoren voor hoefde aan te melden. Deze avond kwamen ongeveer twintig vrouwen, in leeftijd variërend van ± 16 tot ± 55 jaar. Hun wiskundige achtergrond liep uiteen van 'nooit iets aan gedaan' tot 'bezig met een studie M.O.-A.' Er werd gewerkt met het pakketje 'BLIKKEN EN DOZEN', waarvan hier een samenvatting is opgenomen.

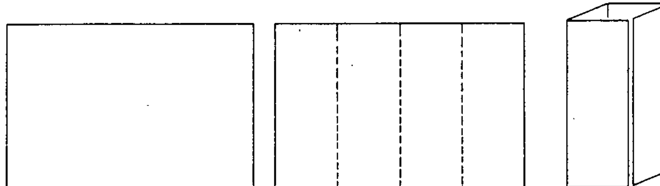
Dozen vouwen

Van een rechthoekig blaadje kun je op twee manieren een doos vouwen (zonder deksel en bodem).

ene manier

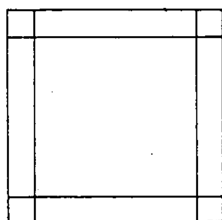


andere manier

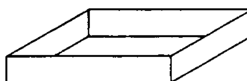


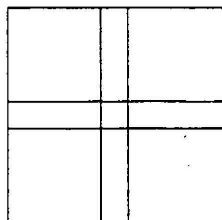
Zou er in beide dozen evenveel kunnen? Of is de inhoud van de ene doos groter of kleiner dan die van de andere? Maak van twee blaadjes deze twee dozen en probeer daarmee de vraag te beantwoorden.

Bakje vouwen



Neem een vierkant stuk papier, zoals hieronder is getekend, en maak een doosje door kleine vierkantjes uit de hoeken weg te knippen.





Hoe verandert de inhoud van het bakje als je de vierkantjes die je uit de hoeken wegknipt groter maakt?



Wanneer past er het meeste in het bakje? Wat is de grootste inhoud die je kunt krijgen?

We gaven die avond eerst een inleiding over het werk van de groep 'Vrouwen en Wiskunde' en het ontstaan van de lespakketjes. We noemden voorbeelden van allerlei aktiviteiten waarbij vrouwen wiskunde gebruiken zonder zich dat nu direkt bewust te zijn, zoals het plooien van gordijnen, naaien van kleding, behangen e.d.
Voor het pakketje 'BLIKKEN EN DOZEN' is een grote hoeveelheid verpakkingen van allerlei dagelijkse produkten verzameld. We lieten hoge, smalle en lage, brede blikjes frisdrank met elkaar vergelijken en berekenden de literprijs van de limonade. Waarom zou een fabrikant voor zo'n hoog en smal blikje kiezen?
Waarom zou een consument voor een puntzak drop kiezen, terwijl daar voor dezelfde prijs minder in zit dan in een doos? Zit er in een plastic zak waspoeder nu echt evenveel als in de kartonnen doos die veel duurder is?
Hierna werd in groepjes gewerkt aan de opdracht uit het lespakketje waarbij het verband tussen oppervlakte en inhoud onderzocht wordt en wat, uitgaande van een gegeven formaat karton (A-4) de maximale inhoud is van de bakjes die je daarmee kunt vouwen.

Voor het saaie rekenwerk dat hieraan te pas komt hadden we rekenmachines meegebracht. Tot onze verbazing wilden veel vrouwen die niet gebruiken. Sommigen omdat ze er nog nooit mee gewerkt hadden, anderen omdat ze er trots op waren dat ze berekeningen met komma's nog best konden uitvoeren. Onze suggestie om afmetingen te schatten (ruitjespapier) en met hele getallen te werken, werd nergens overgenomen!

Het werd een echte 'doe'-avond waarbij iedereen, op heel verschillend niveau, maar steeds met veel enthousiasme, bezig was. Eén van de deelneemsters verzuchtte: 'Van wiskunde snap ik niets, maar dit hier kan ik wel!'
We praatten nog wat na over wat er nu allemaal geleerd was deze avond. Daarna ontstond een levendige discussie over het wiskunde-onderwijs nu en vroeger, over de keuze 'wiskunde verplicht?' en over de noodzaak om vooral meisjes te stimuleren een exact vak te kiezen en zo hun beroepskeuzemogelijkheden te vergroten.
Voor wie nieuwsgierig is geworden naar de inhoud van de lespakketjes, een briefje naar de werkgroep 'Vrouwen en Wiskunde' is voldoende om meer informatie te krijgen. Een collage van de pakketjes is ook te vinden in het boekje 'Vriendelijke Wiskunde', dat onlangs verschenen is. In dit boek staat tevens een verslag van het eerste lustrum van de werkgroep en een weerslag van het denken van deze groep over de positie van vrouwen en meisjes in het wiskunde-onderwijs.

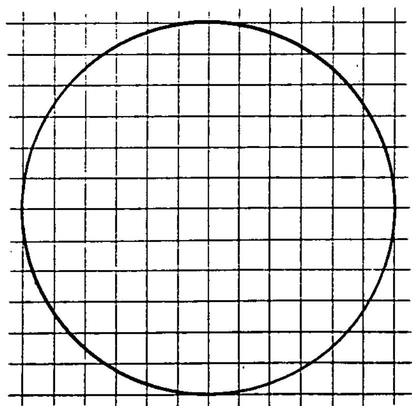
Blikjes

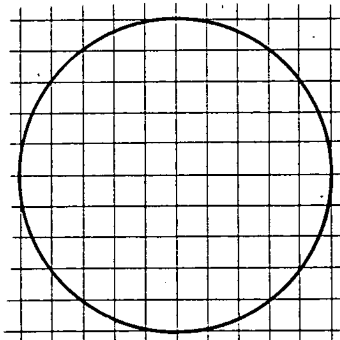
Twee blikjes frisdrank:



Hoeveel gaat er in ieder blikje?

Hieronder staat voor elk van de blikjes de bodem nog eens op ware grootte getekend op ruitjespapier. Bepaal de oppervlakte van iedere bodem.
Het blikje cassis is 11 cm hoog. Hoe hoog zou het hoge blikje moeten zijn om dezelfde inhoud te hebben als het 'brede blikje?

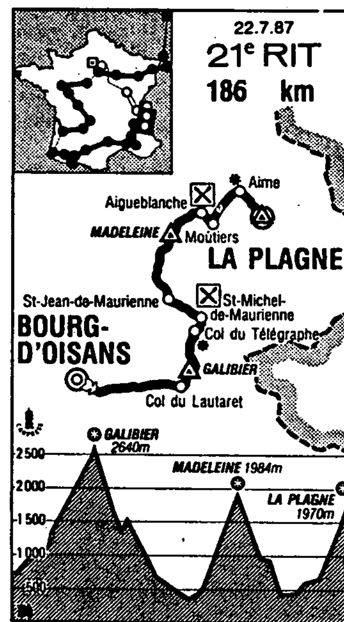




Vriendelijke Wiskunde, Marja Meeder, F. Meester, H. Verhage, S. van Eenbergen.
Te bestellen door overmaking van *f* 17,50 (inclusief verzendkosten) op postrekeningnummer 143917 t.n.v. Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam, onder vermelding van 'Vriendelijke Wiskunde'.
(Zie ook de boekbespreking op pagina 247)

Een etappe in de bergen

Bram van der Wal



Tour de France 1987.

Vooraf

In dit artikel wordt gepoogd een stukje levensechte wiskunde te beschrijven, afgestemd op lbo en mavo-C en -D.
Het gaat over de grote invloed die een lage klimsnelheid heeft op de gemiddelde snelheid van een wielrenner (of een recreatiefietser). Voor het lbo, zo is de ervaring van de auteur, blijkt dat nogal verrassend te zijn.
Uiteraard biedt de beschreven context méér aanknopingspunten dan hier geboden worden; op al die mogelijkheden wordt hier niet nader ingegaan. Evenmin wordt in dit artikel àndere context beschouwd die in feite dezelfde wiskundige problemen zou kunnen opleveren.
Naar de ervaring van de auteur kan met het aangeboden wielrennersprobleem gewerkt worden in heterogene groepen, die (bovendien) gemengd samengesteld zijn.

Inleiding

Tijdens zijn vakantie in de Franse Alpen beklimt Hans op de fiets een van de Cols. De tocht is zwaar en zijn tempo niet hoog. Over de 10 km lange beklimming rijdt hij met een snelheid van 10 km per uur. Boven gekomen kijkt hij even rond en besluit via dezelfde weg naar beneden te gaan. Zijn snelheidsmeter geeft tijdens de afdaling, die dus ook 10 km lang is, een snelheid van 40 km per uur aan. Wat is de gemiddelde snelheid van Hans tijdens de hele tocht?

Veel leerlingen uit de bovenbouw van lbo/mavo geven vrij snel als antwoord 25 km/h. Het gemiddelde berekenen van twee waarden is een vaardigheid zonder begrip geworden. (In dit geval $\frac{10 + 40}{2} = 25$).
Dat het antwoord fout is verbaast de meeste leerlingen.
Om ze op weg te helpen proberen we wat met parate kennis uit de mechanica. Hoe bereken je de snelheid? Wat is het verband tussen snelheid, tijd en afgelegde afstand? Schoorvoetend – wiskunde is tenslotte geen mechanica – komt de formule $v = \frac{s}{t}$.
Samen rekenen we de afstand en de tijd uit die Hans over de tocht deed. De afstand is $2 \times 10 = 20$ km.
De tijd is $\frac{10}{10} + \frac{10}{40} = 1{,}25$ uur.
(Prima gelegenheid om nog eens in de klas door te nemen hoeveel minuten in 0,25 uur gaan.) De gemiddelde snelheid wordt aldus $\frac{20}{1{,}25} = 16$ km/h.
Dat de gemiddelde snelheid zo laag is wekt opnieuw verbazing. Het moment voor een klassege-

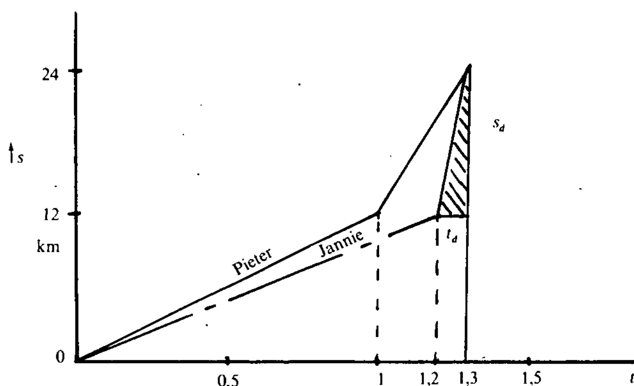
sprek. Waarom is de gemiddelde snelheid zo laag? Waarom ligt de gemiddelde snelheid dichter bij de stijgsnelheid dan bij de daalsnelheid?
Omdat het stijgen langer duurde!
(Voor de ongelovige leerling nog maar eeǹ keer het afgetrapte voorbeeld van het rijtje repetitiecijfers van Karin: 5, 9, 9, 9, 9. Zal Karin een 7 verwachten op haar rapport?)

Een oefening

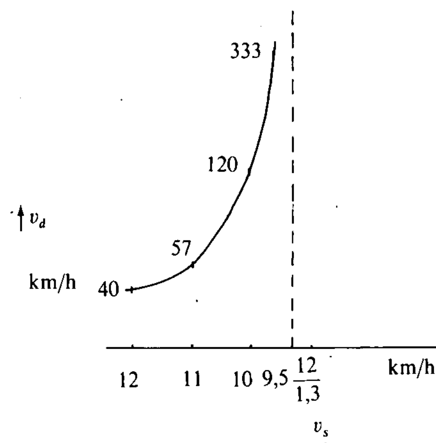
Pieter en Jannie fietsen samen in de bergen. Pieter fietst een 12 km lange helling met een snelheid van 12 km/h omhoog en daalt met een snelheid van 40 km/h.

a Hoe lang doet Pieter over de hele tocht?
b Hoe groot is zijn gemiddelde snelheid over de hele tocht?
c Jannie fietst iets langzamer omhoog: 10 km/h. Hoeveel minuten na Pieter komt ze boven?
d Beiden beginnen zonder boven te rusten aan de afdaling. Hoe groot moet de snelheid van Jannie tijdens het afdalen zijn om tegelijk met Pieter beneden aan te komen?

In figuur 1 is een grafiek getekend die de afgelegde weg tegen de tijd uitzet. Deze grafiek geeft meer inzicht in het laatste vraagstuk en het probleem als geheel.
Uit de grafiek is gemakkelijk af te leiden dat de snelheid van Jannie op de afdaling moet zijn $\frac{12}{0{,}1}$



Figuur 1



Figuur 2

= 120 km/h!
Met behulp van de grafiek is het eenvoudig om de relatie te ontdekken tussen de noodzakelijke daalsnelheid v_d van Jannie en haar gerealiseerde stijgsnelheid v_s.
Uit de gearceerde driehoek in figuur 1 is af te leiden dat de daalsnelheid $v_d = \frac{s_d}{t_d}$

Er geldt: $s = 12$ en $t_d = 1{,}3 - \frac{12}{v_s}$

$$v_d = \frac{12}{1{,}3 - \frac{12}{v_s}}$$

In figuur 2 is de grafiek van deze relatie getekend.
Uit de relatie $v_d = \frac{12}{1{,}3 - \frac{12}{v_s}}$ blijkt dat er drie mogelijkheden zijn:

$$1{,}3 - \frac{12}{v_s} > 0 \Rightarrow v_s > \frac{12}{1{,}3} \qquad \text{(I)}$$

$$1{,}3 - \frac{12}{v_s} = 0 \Rightarrow v_s = \frac{12}{1{,}3} \qquad \text{(II)}$$

$$1{,}3 - \frac{12}{v_s} < 0 \Rightarrow v_s < \frac{12}{1{,}3} \qquad \text{(III)}$$

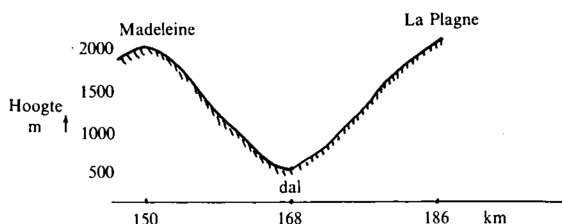
In (III) is sprake van een negatieve snelheid v_d. Voor leerlingen zit de verrassing hierin dat ze ontdekken dat in dit geval Jannie nog aan de klim bezig is terwijl Pieter al beneden is.
In (II) is de kritische waarde bereikt. Geen enkele daalsnelheid – hoe groot ook – leidt tot gelijke aankomst beneden. Voor de leerlingen is het interessant om te zien dat in dit geval Jannie boven arriveert op hetzelfde moment dat Pieter beneden aankomt.
Slechts wanneer aan voorwaarde (I) is voldaan is

met $v_d = \dfrac{12}{1,3 - \dfrac{12}{v_s}}$ de noodzakelijke daalsnelheid van Jannie te berekenen.

De Tour de France

De verrassing van de invloed van verschillende snelheden bij gelijke afstanden is ook op een andere manier zichtbaar te maken. We maken gebruik van de bergetappe uit de Tour de France.
In de Tour de France doen goede klimmers mee en eveneens zijn er roekeloze afdalers. Wat is de winst die een snelle afdaler maakt op een goede klimmer?

In figuur 3 is een gedeelte van de bergetappe vergroot getekend.
De finish is op La Plagne. De afstanden zijn langs de weg gemeten. De hoogte van de cols is op 2000 m

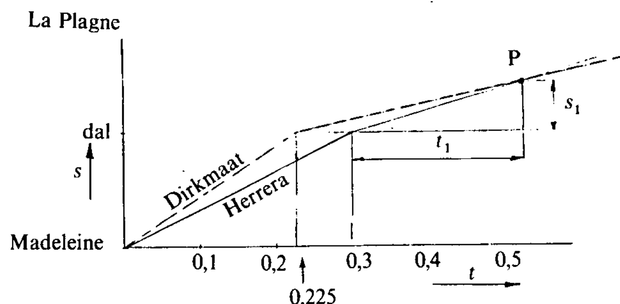


Figuur 3

gesteld. We gaan er van uit dat een grote groep op hetzelfde moment op de Col de la Madeleine aankomt. In de groep bevinden zich de goede klimmer Herrera en de als vrije valler bekend staande Dirkmaat.



Dirkmaat stort zich als een parachutist naar beneden langs de 18 kilometer lange helling met een snelheid van niet minder dan 80 km/h. Herrera neemt minder risico's en gaat met een vaartje van 60 km/h naar beneden.
De daarop volgende klim is eveneens 18 kilometer. Dirkmaat gaat moeizaam omhoog met een snelheid van 12 km/h. Herrera klimt met een snelheid van 15 km/h. Is Dirkmaat nog in te halen en zo ja waar?



Figuur 4

In figuur 4 is de situatie weergegeven.
Een eenvoudige berekening laat zien dat de tijdwinst van Dirkmaat op Herrera na de afdaling 0,075 uur is. Stel dat Herrera Dirkmaat in P inhaalt tijdens de beklimming. Dat is na s_1 km klimmen en t_1 uur.
Voor Herrera geldt: $s_1 = t_1 \cdot 15$
Dirkmaat is dan al 0,075 uur aan het klimmen.
Voor hem geldt dus: $s_1 = (t_1 + 0{,}075) \times 12$
Nu is: $15 \cdot t_1 = 12\,(t_1 + 0{,}075)$
Hieruit volgt $t_1 = 0{,}3$ uur en $s_1 = 4{,}5$ km.
Op $\frac{1}{4}$ van de beklimming laat Herrera dus al het achterwiel van zijn fiets aan Dirkmaat zien. Zijn supersnelle afdaling heeft hem behalve veel risico's niets opgeleverd. De kus van de Rondemiss is voor Herrera!

Over de auteur:

Bram van der Wal is leraar wiskunde aan een scholengemeenschap voor LBO in Apeldoorn. Hij heeft ruim twintig jaar ervaring in het werken met leerlingen op zowel A, B, C als D-niveau in zowel homogeen als heterogeen samengestelde groepen.
Na zijn opleiding aan de ambachtsschool in de jaren vijftig behaalde hij achtereenvolgens onderwijsbevoegdheden voor werktuigbouwkunde, wiskunde, godsdienst en maatschappijleer.
Zijn vele recreatieve fietstochten in de bergen hebben hem, gezien de inhoud van dit artikel, tot nadenken gestemd.

Met het oog op werken met heterogene groepen

Sieb Kemme

1 Inleiding

Steeds meer scholen gaan over tot het vormen van heterogene brugklassen van één jaar of meer. Soms worden ze daar toe gedwongen door hun besturen, soms is het vrijwillig, met de basisvorming in het vooruitzicht of gewoon vanwege de concurrentiepositie bij teruglopende leerlingen-aantallen. In ieder geval zijn brugklassen met leerlingen van lbo- tot vwo-niveau allang geen uitzondering meer. Voor leraren die gewend waren te werken met homogene brugklassen is dit een hele overgang. Ieder vak heeft zo zijn eigen problemen bij een dergelijke verandering. Zo ook het vak wiskunde. De traditionele schoolmethodes hadden aparte leergangen voor verschillende schooltypes. Iedere leergang draagt onmiskenbaar het stempel van het bijbehorende schooltype. Dat betekent dat niet zomaar één van die leergangen als methode voor een heterogene brugklas kan worden gekozen. Gelukkig zijn de meeste uitgevers hard aan het werk met het ontwikkelen van methodes die ook geschikt zijn voor heterogene klassen. Maar daarmee zijn de verschillen tussen leerlingen in wiskundige capaciteiten niet weggepoetst. Die verschillen kunnen aanzienlijk zijn. Neem bijvoorbeeld alleen maar eens het verschil in rekenvaardigheid. Een dergelijke situatie vraagt niet alleen om totaal herziene leerstof, maar waarschijnlijk ook om een andere aanpak in de klas.

Vroeger, toen we het nog over de middenschool hadden, heeft Freudenthal het idee gelanceerd om met heterogene tafelgroepen in een klas te gaan werken. Hij betoogde dat de verschillen tussen leerlingen de kwaliteit van het onderwijs daarmee zelfs zouden kunnen bevorderen in plaats van belemmeren, onder de voorwaarde dat leerlingen echt samenwerken, waarbij ze elkaar helpen om samen een taak tot een goed einde te brengen. Dit idee spoorde in die tijd heel mooi met de sociale doelstellingen van de middenschool waarin leerlingen door het leren samenwerken beter geacht werden te zijn voorbereid op de maatschappij.

Deze (voor die tijd) revolutionaire gedachte werd door de WISKIVON-groep van het IOWO opgepakt in hun experimenten rondom 12-16. Dit resulteerde in een serie pakketjes voor de eerste twee leerjaren, in lijn gebracht door een raampjesplan. Vanwege de opheffing van het IOWO is dit werk voortgezet door de SLO in het project wiskunde 12-16. De accenten zijn daarbij wat anders komen te liggen. In het IOWO-materiaal speelt de meetkunde een aanzienlijke rol, het SLO-materiaal concentreert zich vooral rondom de lijn verbanden-grafieken-functies. Gemeenschappelijke trek is de keuze om wiskunde te bedrijven vanuit voor leerlingen herkenbare (praktische) situaties èn de keuze om dit in groepswerk te doen.
Bij de Stichting voor onderzoek van het onderwijs (SVO) is, samen met de universiteit van Utrecht, een onderzoek Interne Differentiatie gestart, dat onderzoekt wat de leereffecten zijn van het werken aan wiskunde in heterogene groepen. Als bijprodukt van het SLO-ontwikkelingswerk en het SVO-onderzoek zijn nu twee publikaties verschenen die bedoeld zijn als handleiding voor wiskundedocenten die met heterogene groepen in de klas (willen gaan) werken. Deze publikaties zijn:

SLO: Met het oog op . . .de leerkracht in de praktijk van het werken met kleine heterogene groepen.
SLO, Enschede 1985.

M. W. Posthuma de Boer: Werken met heterogene groepen. Een handleiding voor leerkrachten in de eerste fase van het voortgezet onderwijs, met voorbeelden uit het wiskunde-onderwijs.
SVO, Den Haag 1986.

In de rest van dit artikel zal ik deze twee publikaties bespreken. Allereerst zal ik een korte schets geven van de inhoud en opzet van beide boekjes afzonder-

lijk. Daarna zal ik tot een gefundeerd oordeel proberen te komen over de waarden van de publikaties als handleiding voor de docent.

2 Met het oog op...

In de 'Leeswijzer' geven de auteurs zelf de volgende samenvatting van de inhoud:

> In het eerste hoofdstuk –Vaardigheden van de leerling en de rol van de leerkracht– staat het materiaal centraal. Welke eisen stelt het materiaal aan de vaardigheden van de leerling? Aan welke eisen moet het materiaal voldoen als je als leerkracht met kleine heterogene groepen wil werken?
> Op deze vragen wordt ingegaan en vervolgens wordt door middel van allerlei voorbeelden duidelijk gemaakt waar voor de docent didactische valkuilen in het materiaal kunnen zitten en waar juist allerlei mogelijkheden in kleine heterogene groepen kunnen worden uitgebouwd.
> Het tweede hoofdstuk –Werken in heterogene groepen– stelt de didactiek centraal.
> Hoe deel je groepen in? Hoe ga je als docent om met de klas als geheel, wanneer deze in kleine groepen verdeeld is? Wat doe je als in een bepaald groepje de samenwerking stagneert? Vanzelfsprekend komt in dit hoofdstuk het leerlingenmateriaal voortdurend ter sprake.
> Dat geldt ook voor het derde hoofdstuk –Toetsen, een eerste verkenning.
> In een bepaald opzicht is dit hoofdstuk een vreemde eend in de bijt. Van de drie aan het begin van deze leeswijzer genoemde aandachtspunten in het onderwijs, ontbreekt hier in onze situatie alle praktijkervaring. Laat staan dat die praktijk kritisch bekeken is. Vandaar dat dit hoofdstuk een eerste grove zeer onvolledige verkenning biedt.
>
> Het laatste hoofdstuk tenslotte –Veranderen! Maar hoe?– staat enigszins los van het voorgaande. Eigenlijk zou je dit hoofdstuk als eerste in het boek verwachten. Immers het plannen van veranderingen in het wiskunde-onderwijs van een sectie, gaat vooraf aan het uitvoeren ervan. Toch hebben we gemeend dit hoofdstuk achteraan te moeten plaatsen. Wanneer je als leerkracht op zoek bent naar verbeteringen binnen je wiskunde-onderwijs, ben je allereerst geïnteresseerd in de inhoud van andere zienswijzen. Pas daarna komen zaken waaraan je in je sectie moet denken wanneer je bepaalde veranderingen wilt invoeren.

Met het oog op... sluit aan bij een eerdere SLO-publikatie (1983); 'naar aanleiding van...' (het werken in (kleine) heterogene groepen). Deze publikatie is vooral beschrijvend van aard. Ze bevat beschrijvingen van ervaringen met het werken met SLO-materiaal op 'Revius' in Deventer en achtergrondinformatie over de SLO-visie op het werken in heterogene groepen en op het leerplan wiskunde.

3 Werken met heterogene groepen

Ook hier wordt in de inleiding een korte samenvatting van de inhoud gegeven. We laten de auteur aan het woord:

> Voor de opzet van de handleiding is als grondstructuur gekozen voor het (chronologisch) verloop van een les(senreeks). Achtereenvolgens komen aan de orde:
> - de uitgangspunten van het SLO-materiaal voor wiskunde-onderwijs aan heterogene groepen en die van de handleiding.
> - de beginsituatie in de klas, hoe van daaruit groepjes gevormd kunnen worden en wat er bij het samenwerken in groepjes komt kijken.
> - de opbouw van de lessen waarin de leerkracht de klassikale momenten vorm geeft met behulp van de Socratische gespreksmethode en de groepjes observeert en begeleidt gedurende het groepswerk.
> - evaluatie van de voortgang van individuele leerlingen.

In deze samenvatting is de bijlage niet vermeld. Deze bijlage bevat lesfragmenten over de manier van vragen stellen door de leerkracht. Ze omvat de helft van de publikaties (51 van de 101 bladzijden) met 22 protocollen van lesfragmenten en kort aansluitend kommentaar.

De opzet van de publikatie is om een meer specifieke handleiding bij het SLO-materiaal te ontwikkelen (dan 'naar aanleiding van...') voor het gebruik in klassen waarin in heterogene groepjes wordt samengewerkt. De handleiding is gebaseerd op literatuurstudie, gesprekken met de SLO-medewerkers, de voorbereiding, observaties en nabesprekingen van een 12-tal lessen over het onderwerp 'Regelrecht' (SLO), een grondige analyse van het leerkracht-gedrag tijdens de lessen en ervaringen van het SVO-onderzoekproject Interne Differentiatie.

4 Criteria voor een goede handleiding

Stel ik ben een leraar die volgend schooljaar in een heterogene brugklas gaat werken met het SLO-materiaal, neem bovendien eens aan dat ik overweeg dat in heterogene groepjes aan te pakken (zoals de SLO aanbeveelt) en dat ik me vooraf (dus in de vakantie) wil verdiepen in de mogelijkheden en onmogelijkheden van deze voor mij nieuwe werkvorm, hoe zou een goede handleiding er dan moeten uitzien?

Die handleiding zal in de eerste plaats antwoord moeten geven op vragen die voor mij van direct belang zijn om deze werkvorm te kunnen uitvoeren.
Dat zijn vragen als:

- Hoe deel ik het lokaal in?
- Hoe weet ik het geluidsniveau binnen de perken te houden?
- Hoe hou ik overzicht over de vorderingen van iedere leerling?
- (in aansluiting op de vorige vraag) Hoe kan ik nog adequaat inspelen op de individuele capaciteiten van de leerlingen als ik niet meer kan zien wàt een leerling zelfstandig weet te presteren?
- Hoe leer ik leerlingen samenwerken?
  Bijvoorbeeld: hoe voorkom ik dat een zwakke leerling volledig gaat steunen op de rest van de groep en zelf geen enkele inbreng heeft? Of: hoe voorkom ik dat een goede leerling de hele groep gaat domineren, zijn eigen antwoorden dikteert en oplossingen van andere leerlingen terzijde schuift?
- Hoe gaan mijn lessen eruit zien (denkend aan mijn oude schema: huiswerk - nieuwe stof - zelfwerkzaamheid)? Wat doe ik eigenlijk nog in de les (anders dan ordebewakend optreden)?
- Deel ik de groepjes in of doen de leerlingen dat zelf?
- Wat is de winst t.o.v. mijn oude stijl van lesgeven? In leerresultaten, in motivatie tijdens de les, in houding t.o.v. het vak?
- Hoe toets ik? Moet ik ook het samenwerkingsgedrag beoordelen? Is een individueel proefwerk niet strijdig met het groepswerk? Kun je een groepsopdracht geven? Hoe geef ik een cijfer voor een groepsopdracht?
- Hoe maak ik leerlingen duidelijk wat het nut is van groepswerk? Of hoef ik dat helemaal niet duidelijk te maken en spreekt dat voor zich? Wat doe ik met leerlingen die te kennen geven dat ze veel liever voor zichzelf willen werken?
- Gaat het groepswerk niet vreselijk ten koste van het tempo? Hoe zorg ik ervoor dat de vaart erin blijft zonder dat ik daarmee teveel druk leg op de mogelijkheden om samen te kunnen werken in een groepje?
- Werken de andere groepjes wel door terwijl ik me uitvoerig met één groepje bezighoudt?

Op deze lijst zal vast nog wel wat zijn aan te merken. Niet iedereen zal dezelfde vragen stellen. Bovendien vertellen sommige vragen al iets over mijn instelling ten opzichte van deze werkvorm. Maar het zijn wel allemaal vragen die te maken hebben met mijn functioneren in de klas met een nieuwe onbekende werkvorm. Een handleiding dient zo volledig mogelijk antwoord te geven op dit soort vragen.

Als tweede criterium voor de kwaliteit van een handleiding vind ik dat die inspirerend moet zijn. Er moet een zeker enthousiasme van uitgaan. Je moet er (nog meer) zin in krijgen om het uit te proberen. Je moet er nieuwe ideetjes uit kunnen opdoen. Er moeten niet teveel waarschuwingen voor valkuilen in staan, **niet teveel theoretische overwegingen.** Maar vooral **beschrijvingen van ervaringen** waarin iets gebeurt, waarin leerlingen actief hun hersens laten kraken, waarin de leerkracht of een leerling door een onverwachte wending een heel nieuw gezichtspunt weet aan te dragen,... Uit de positieve leservaringen moet zonneklaar blijken wat het effectieve voordeel kan zijn van deze werkvorm. Zoiets geeft houvast en kan je motiveren om het zelf te proberen.

Het **taalgebruik** moet helder zijn. Geen lange uitweidingen in een bepaald jargon. Maar een korte, leesbare stijl die goed de kern van de beweringen zichtbaar maakt.

5 Beoordeling

In deze paragraaf zal ik de twee handleidingen toetsen aan de twee in de vorige paragraaf geformuleerde criteria:

1 Krijg ik voldoende informatie om de werkvorm te kùnnen uitvoeren? (zie de vragenlijst in 4.)

2 Weet de handleiding mij voldoende te inspireren om de werkvorm te wìllen uitvoeren?

Eerst geef ik een kort overzicht van de inhoud van beide boekjes over een aantal belangrijke onderwerpen. Daarna geef ik mijn persoonlijk getinte commentaar. Vanwege het subjectieve karakter zal ik dat *cursief* en tussen haakjes zetten. Dan weet u wat u over kunt slaan als u daarin niet geïnteresseerd bent.

1 Informatie over de organisatie van groepswerk

Beide boekjes zijn het duidelijkst over **de manier waarop de groepjes samengesteld kunnen worden.** Ze noemen een aantal factoren die belangrijk zijn voor het functioneren van de groepjes, zoals: verdeling jongens- meisjes, mate van heterogeniteit, grootte van de groepjes. Het SVO-boekje geeft een duidelijke voorkeur: groepjes van 4 personen, 2 jongens en 2 meisjes, met voldoende spreiding naar karakter, attitude, vaardigheden en sociaal-culturele achtergrond, zijn ideaal.

(Ik voel me wat ongemakkelijk bij een dergelijke uitspraak. Ik zou wat meer ruimte willen om gewoon maar wat te proberen in de klas en het wat meer van de situatie laten afhangen. Als ik maar weet waar ik op moet letten bij de indeling in groepjes.)

Het SLO-boekjes besteedt een hele paragraaf aan **het leren samenwerken.** Er staan een aantal nuttige aandachtspunten in: werkafspraken laten maken in de groepjes, duidelijk maken dat ze mèt elkaar de opgaven moeten maken, dat ze onderlinge competitie moeten zien te vermijden.

(Toch blijf ik zitten met vragen: kan ik dat leerlingen ècht duidelijk maken of kan ik ze het alleen maar aanpraten? vragen al deze zaken niet een soort langdurige sociale training waarvan het effect twijfelachtig is? Horen die samenwerkingsaspecten (waar ik het overigens van harte mee eens ben) niet een natuurlijk uitvloeisel te zijn van de gestelde taken? Ik bedoel maar: aan boord van een schip wordt nauwelijks over samenwerken gesproken, het is daar volstrekt duidelijk dat je elkaar nodig hebt, dat je er niet komt als ieder voor zich gaat werken.)

Over **de lesindeling** zijn beide boekjes het opvallend eens. Iedere les kent een driedeling: voorbereidend klassikaal moment, groepswerk, reflecterend klassikaal moment. Het reflecterende klassikale moment kan eventueel ook naar een volgende les verschuiven als de leerlingen er gewoon nog niet aan toe zijn. Over het voorbereidend klassikale moment en de begeleiding van het groepswerk wordt uitvoerige, met voorbeelden begeleide, informatie gegeven. Over het reflecterende klassikale moment geeft alleen het SVO-boekje een drietal summiere richtlijnen.

(Juist dat reflecterende klassikale moment lijkt me zo moeilijk! Ik zie er het belang wel van in, maar hoe voorkom ik dat het alleen maar het snel bespreken van antwoorden wordt? Hoe zorg ik ervoor dat leerlingen nog echt iets nieuws leren in een dergelijk ogenblik zodat ze het nut ervan inzien en er een natuurlijke aandacht is? Bovendien lijkt me dit vreselijk moeilijk om in goede banen te leiden. Iedereen wil natuurlijk zijn/haar eigen zegje doen. Ik zal voortdurend keuzen moeten maken zonder iemand tekort te doen. Het opstarten van een les in een klassikaal ogenblik lukt altijd wel, bovendien kun je dat van te voren goed voorbereiden. Het begeleiden van de groepjes wijst zich wel vanzelf (als je maar weer weet waar je op moet letten). Maar zo'n nabespreking eist nogal wat van je improvisatie-kunde.)

Ook besteden beide boekjes aandacht aan **de toetsproblematiek.** Het SLO-boekje het meest uitvoerig in een apart hoofdstuk, maar ook het meest bescheiden. Er is nog te weinig ervaring om nu iets gedegens over het toetsen op te merken. Het boekje plaatst een aantal waarschuwingstekens bij voor-

beeldtoetsen en suggereert het systeem van de aandachtpunten 'kern en probleemsituaties' van Van Dormolen te hanteren als mogelijkheid om toetsen op hun waarde te analyseren.
(Hier blijf ik met heel veel vragen zitten (zie boven bij 4). Eigenlijk word ik niet veel wijzer. Wat moet ik bijvoorbeeld met een zin als: 'Naast deze informele wijze van evalueren die een diagnostische functie kan hebben, is het raadzaam regelmatig toetsen af te nemen om te controleren of de individuele leerlingen de communale doelen beheersen' (SVO)?)

Het SLO-boekje besluit met een paragraaf over **de mogelijkheden om te veranderen op een school.** Ze bepleit een voorzichtige fasegewijze aanpak die in een tijdsbestek van 3 jaar uit kan groeien tot een volledige verandering.
(Heel nuttige en realistische tips, als de hele sectie tenminste mee wil doen. Wat moet ik doen als dat niet zo is en er maar een paar leraren iets anders willen?)

2 De (inspirerende?) toon
In beide boekjes wordt regelmatig naar **theorie** verwezen. Het SVO-boekje is doorspekt met literatuur-verwijzingen en citaten. Voortdurend wordt verwezen naar algemeen-onderwijskundige theorieën over coöperatief onderwijs, gespreksvormen in de klas en evaluatie. Het SLO-boekje is wat bescheidener met wetenschappelijke verwijzingen naar leerstijlen – typering en naar het voorgesteld analyse-systeem van Van Dormolen.

(Het SVO-boekje zit vol algemeen onderwijskundige open deuren. Zoals het gedeelte over de Socratische gespreksmethode in de klas. Na een verzameling citaten volgt een Engelse versie van het gesprek van Socrates met de slaaf. Dit is wel het slechtste voorbeeld dat ik ken om gespreksvormen in de klas mee te illustreren. De vragen die Socrates stelt zijn zo gesloten dat het antwoord van de slaaf maximaal uit drie woorden bestaat en altijd goed is. Ik betwijfel de praktische toepasbaarheid van het voorgestelde analyse-systeem van Van Dormolen. Uit het proefschrift van Van Dormolen blijkt dat er nauwelijks overeenstemming bestaat tussen de verschillende uitgevoerde analyses. Het nut van dergelijke verwijzingen binnen een docentenhandleiding is onduidelijk. Praktische adviezen behoeven geen legimitering vanuit wetenschappelijke resultaten die vaak in laboratorium-achtige situaties zijn verkregen. Het lijkt er sterk op dat de auteurs de wetenschap hier gebruiken om wat meer gewicht aan hun produkten te geven.)

In het SVO-boekje wordt voortdurend verwezen naar **lesfragmenten** die apart in een bijlage zijn toegevoegd. Het begeleidende commentaar heeft het karakter van samenvattingen.
In het SLO-boekje zijn de geobserveerde lesfragmenten op een functionele manier met de tekst verweven.
(Het is belangrijk dat adviezen gebaseerd zijn op herkenbare en overdraagbare onderwijssituaties. In dit verband kunnen verwijzingen naar de lesfragmenten zeer zinvol zijn. In het commentaar bij die fragmenten moet dan wel iets nieuws worden toegevoegd. Het moet een soort inzichtverhogende reflectie zijn op het gebeuren. In het SVO-boekje is daarvan geen sprake.)

Het **taalgebruik** van beide boekjes is niet altijd even duidelijk. Het SVO-boekje nog het minst. Dat staat vol met een onderwijskundig jargon dat meer verhuld dan onthuld. De SLO-stijl leest gemakkelijker maar het is niet overzichtelijk genoeg. Je bent voortdurend op zoek naar de lijn in het verhaal. Er staat vaak meer tekst dan nodig is.
(Eén voorbeeld van een demotiverende zin heb ik al gegeven. Ik kan niet nalaten er nog één te geven: 'Stel heldere vragen, zodat de leerling weet wat wordt bedoeld'. Een zin zonder inhoud. Een heldere vraag is per definitie een vraag waarvan de leerling weet wat er wordt bedoeld. Misschien bedoelt de auteur met deze zin: 'zorg ervoor dat je duidelijk bent'? Dan is het een open deur.)

6 Tot slot

Misschien is het nog te vroeg om een docentenhandleiding te schrijven over groepswerk in het wiskunde-onderwijs en is er gewoon nog te weinig overdraagbare praktische ervaring. Misschien is het zelfs onmogelijk om algemeen bruikbare handleidingen over werkvormen in de klas te schrijven en kunnen aanwijzingen alleen maar effectief zijn als ze gebaseerd zijn op de specifieke onderwijssituatie van de individuele leerkracht. In ieder geval

ben ik met geen van beide boekjes erg gelukkig. Met het SVO-boekje nog wel het minst. Kort samengevat vind ik dat de boekjes onvolledig zijn ten aanzien van een groot aantal praktische problemen die bij groepswerk een rol spelen en dat ze niet erg inspirerend zijn om aan groepswerk te beginnen. Ook vind ik het onbegrijpelijk dat de boekjes bijna tegelijkertijd verschijnen, onafhankelijk van elkaar en met verwijzing naar hetzelfde lesmateriaal. Ik hoop dat er leraren zijn die er niet zo over denken.

3de Vlaamse Wiskunde Olympiade 1e ronde – 13 januari 1988

De eerste ronde van de derde Vlaamse Wiskunde Olympiade is gehouden op 13 januari 1988. Er waren 5139 deelnemers. De opgaven zijn zoals bekend multiple choice.

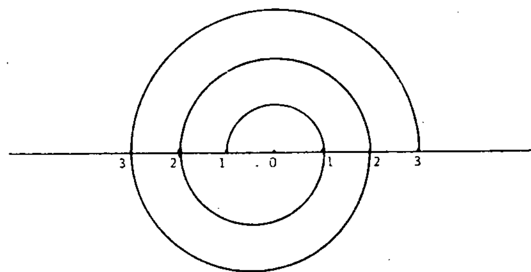
Opgaven

1. Voor hoeveel x-waarden behorende tot $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ is
$$\frac{2x^2 - 13x + 15}{x - 3}$$
negatief of nul?
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4 E. 5

2. Hoeveel getallen met vier cijfers moet men ten minste nemen om zeker te zijn dat er twee dezelfde som van de cijfers hebben?
A. 36 B. 37 C. 40 D. 41 E. geen van de vorige

3. 2^{1988} eindigt op
A. 1 B. 2 C. 4 D. 6 E. 8

4. Men vormt een spiraal door het continu aan-

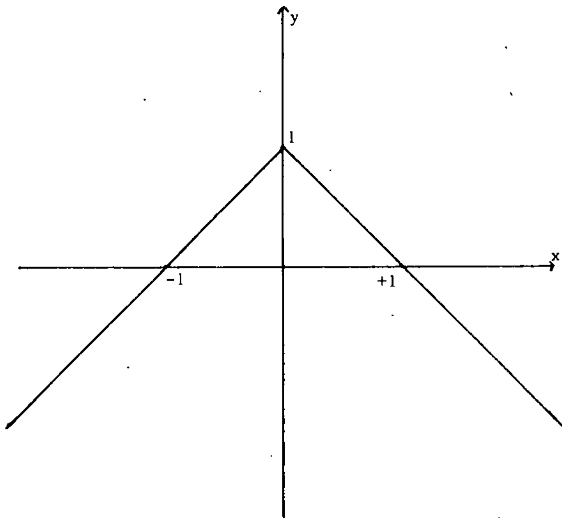


eensluiten van halve cirkels, beginnend met een halve cirkel met diameter 2, vervolgens diameter 3, diameter 4, ... Hoe lang is de spiraal gevormd door 100 zulke halve cirkels?
A. 2525π B. 2550π C. 2575π
D. 5100π E. 5150π

5. Laat $\vec{u}$ en $\vec{v}$ eenheidsvectoren zijn in het vlak. Dan is $\vec{u}$ en $\vec{v}$ een eenheidsvector als en slechts als
A. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ B. $\vec{u}\cdot\vec{v} = -\frac{1}{2}$ C. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 1$
D. $\vec{u}\cdot\vec{v} = -1$ E. altijd

6. Gegeven zijn de functies f en g in $\mathbb{R}$ met $f(x) = \sqrt{1 - x}$ en $g(x) = \sqrt{x - 1}$.
Het domein van de samengestelde functie $f \circ g$ is dan
A. $\{1\}$ B. $[-1, 1]$ C. $[1, 2]$
D. $[0, 1]$ E. $[1, +\infty[$

7. Dit is de grafische voorstelling van de relatie in $\mathbb{R}$ met als voorschrift
A. $x + |y| = 1$ B. $|x| + y = 1$
C. $|x| + |y| = 1$ D. $|x + y| = 1$
E. $|x| - y = 1$



8. Zij $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \mapsto \max\{\sin x, \cos x\}$ (d.w.z. die x afbeeldt op het grootste van de twee getallen $\sin x$ en $\cos x$). Dan is $f(\mathbb{R})$ gelijk aan
A. $\mathbb{R}$ B. $[-1, 1]$ C. $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$
D. $[0, 1]$ E. $\{1\}$

9. Gegeven de veeltermen
$x^2 + 1, \quad x^3 + 1, \quad x^4 + 1, \quad x^5 + 1, \quad x^6 + 1$
Hoeveel van deze veeltermen kunnen worden ontbonden als produkt van veeltermen met een lagere graad en met reële coëfficiënten?
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3 E. 4

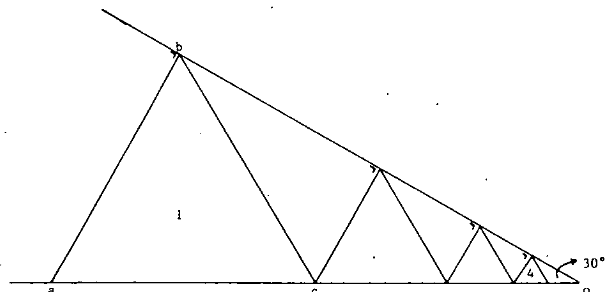
10. Als $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$, $n \in \mathbb{N}_0$, dan geldt
$a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n =$
A. $\dfrac{a - a^{n+1}}{1 - a}$ B. $\dfrac{1 - a^n}{1 - a}$ C. $\dfrac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$
D. $\dfrac{a - a^n}{1 - a}$ E. $\dfrac{a^n - a}{1 - a}$

11. Hoeveel getallen kleiner dan 100 zijn het produkt van een priemgetal met het kwadraat van een ander priemgetal?
A. 4 B. 5 C. 15 D. 17 E. 44

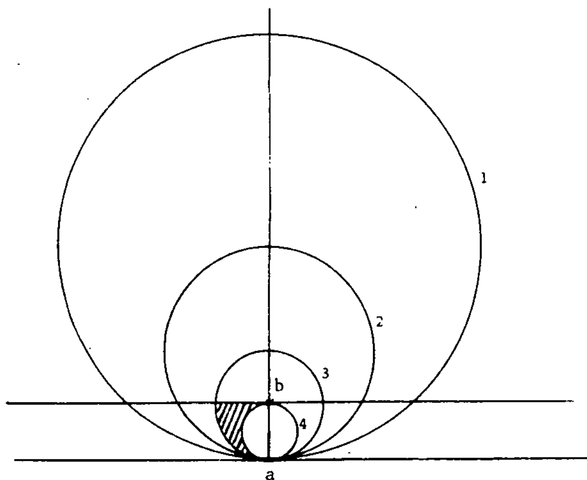
12. Wat weet je van een reëel getal x dat voldoet aan $\sqrt{(x - 1)^2} = 1 - x$?
A. x is willekeurig B. $x = 1$
C. $x = 0$ D. $x \leq 0$ E. $x \leq 1$

13. De unie (vereniging) van alle intervallen in $\mathbb{R}$ van de vorm $\left[1 + \frac{1}{n}, 5 - \frac{2}{n}\right]$ met $n \in \mathbb{N}_0$ is
A. $[1, 5]$ B. $]1, 5[$ C. $[\frac{3}{2}, 4]$
D. $[2, 3]$ E. $]1, 5]$

14. In het binnengebied van een sector van 30° tekent men een eerste gelijkzijdige driehoek abc met $ab \perp ob$. Volgens hetzelfde procédé tekent men nog drie driehoeken er bij.
De verhouding van de oppervlakte van driehoek 4 tot de oppervlakte van driehoek 1 is
A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{16}$ C. $\frac{1}{32}$ D. $\frac{1}{64}$ E. $\frac{1}{128}$



15. Vier cirkels raken elkaar in een punt a zoals aangegeven op de figuur. De straal van de grootste cirkel is R en elke kleinere cirkel gaat door het middelpunt van de juist grotere.



In b (het diametraal tegengesteld punt van a) trekt men een raaklijn aan de vierde cirkel. Hoe groot is de gearceerde oppervlakte?

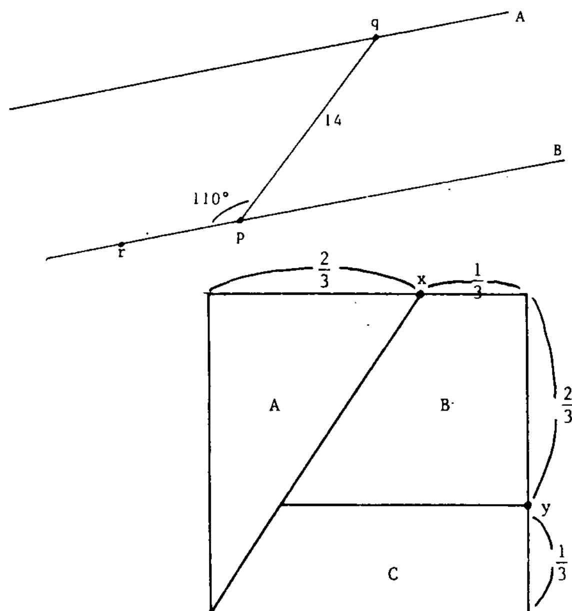
A. $\frac{\pi R^2}{16}$ B. $\frac{\pi R^2}{64}$ C. $\frac{3\pi R^2}{64}$ D. $\frac{3\pi R^2}{128}$

E. $\frac{\pi R^2}{128}$

16. De ribben van een kubus worden met 25% verlengd.
Met hoeveel % (eventueel afronden op 1% na) wordt de inhoud vergroot?
A. 25% B. 75% C. 95%
D. 125% E. 625%

17. Als $f(m, n) = f(m + 1, n - 1)$, met $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ en $f(m, 0) = m$, dan is $f(101, 11) =$
A. 90 B. 102 C. 111 D. 112 E. 122

18. Gegeven twee evenwijdige rechten A en B en punten p, q en r op deze rechten zodanig dat $\|pq\| = 14$ en $\widehat{rpq} = 110°$.
Welke is de afstand tussen beide evenwijdige rechten?
A. $14\cos 110°$ B. $14\sin 110°$
C. $14\cos 70°$ D. $\frac{14}{\cos 110°}$ E. $\frac{14}{\sin 110°}$



19. De punten x en y worden genomen zo dat ze de zijde van een vierkant verdelen in een $\frac{2}{3} \leftrightarrow \frac{1}{3}$ verhouding (zie figuur).
Dan geldt voor de oppervlakten A, B en C

A. $C < A < B$ B. $A < C < B$
C. $B < C < A$ D. $C < B < A$
E. $A = B = C$

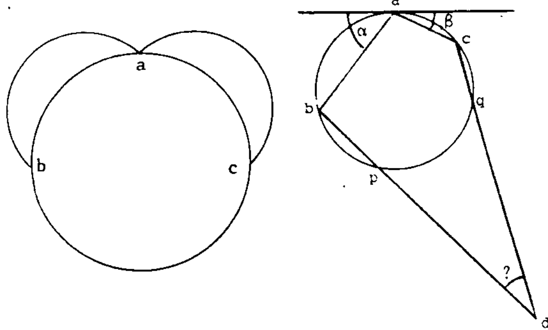
20. Zij $k \in \mathbb{Z}$ en
$M = \sqrt{(k^2 + 1)(k + 1)^2 + k^2}$.
Dan geldt
A. $M \geq k^2$ B. $M \leq k^2 + 4$ C. M even
D. M oneven E. M hoeft niet geheel te zijn

21. Uit $a < b$ met $a, b \in \mathbb{R}$ volgt
A. $|a| < |b|$ B. $a^2 < b^2$ C. $a^3 < b^3$
D. $a^4 < b^4$ E. $\sqrt{|a|} < \sqrt{|b|}$

22. Wat is het minimaal aantal stompe hoeken van een convexe veelhoek met n zijden ($n \geq 5$)?
A. 0 B. 1 C. $n - 3$ D. $n - 2$ E. $n - 1$

23. Hoe groot is de oppervlakte van de beide oren van 'Mickey Mouse', als men weet dat de grote cirkel straal 1 heeft, de rand van de oren halve cirkels zijn, en a het midden is van de halve cirkel bc?

A. 1 B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{4}$ E. $\pi - 2$



24. Hoeveel verschillende koppels reële getallen behoren tot ten minste 2 van de volgende 3 verzamelingen:

$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x - 2\}$

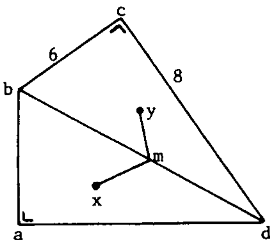
$Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = (x - 2)^2\}$

$Z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = (x - 2)^3\}$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4 E. meer dan 4

25. In de vierhoek $abcd$ zijn de hoeken $\hat{a}$ en $\hat{c}$ recht en is m het midden van de diagonaal $[bd]$. Verder is x het zwaartepunt van driehoek abd en y het zwaartepunt van driehoek cbd.
Hoe groot is de som van de afstanden van x tot m en van m tot y, als je weet dat $\|bc\| = 6$ en $\|cd\| = 8$?

A. $\frac{5}{3}$ B. $\frac{9}{3}$ C. $\frac{10}{3}$ D. $\frac{12}{3}$ E. $\frac{15}{3}$



26. Als we de bal naar een basketring werpen hebben we succes (als de bal door het net gaat) of hebben we pech. Veronderstel dat we 6 keer werpen.
Als de uitspraak 'Ik heb ten minste 4 keer succes gehad' onwaar is, welke uitspraak is dan wel waar?

A. Ik heb ten minste 3 keer pech gehad.
B. Ik heb ten minste 4 keer pech gehad.
C. Ik heb ten hoogste 2 keer succes gehad.
D. Ik heb ten hoogste 4 keer pech gehad.
E. Ik heb ten hoogste 4 keer succes gehad.

27. Door de hoekpunten a, b, c van nevenstaande convexe vierhoek $abdc$ wordt een cirkel geconstrueerd, alsook de raaklijn in a aan de cirkel (d ligt buiten de cirkel). Die raaklijn maakt met ab en ac de hoeken α en β (zie figuur) waarvan de som 80° is.
Hoe groot is de hoek in d als je weet dat $\widehat{pq}$ een kwart cirkelboog is? (p en q zijn de snijpunten van de cirkel met resp. bd en cd).

A. 30° B. 35° C. 40° D. 45°
E. te weinig gegevens om die hoek te kunnen bepalen

28. De grafieken van $y = ax$ en $y = b - x$ snijden elkaar in het punt (p, q) van het derde kwadrant (dus $p < 0, q < 0$). Hieruit volgt dat

A. $p > q$ B. $p = q$ C. $p < q$
D. $ab < 0$ E. $ab > 0$

29. Een aantal jaren geleden werd een internationaal codeersysteem voor boeken ingevoerd. Elk boek krijgt sindsdien een ISBN (International Standard Book Number) toegekend. Zo'n nummer bestaat uit 10 cijfers. Als een ISBN nummer er b.v. als volgt uitziet

$x_1 / x_2x_3/x_4x_5x_6x_7x_8x_9 / x_{10}$

dan is steeds voldaan aan

$\sum_{i=1}^{10} ix_i$ is een 11-voud

Bij het elektronisch doorsturen van een ISBN code zijn storingen opgetreden, waardoor men enkel het volgende met zekerheid juist ontving: 0/20/?1?502/7
Hoeveel verschillende ISBN codes zijn nog mogelijk, vertrekkende van dit onvolledig nummer?

A. 1 B. 3 C. 5 D. 7 E. 9

30. Hoeveel symmetrievlakken heeft een kubus?

A. 3 B. 4 C. 6 D. 9 E. 12

De computer in het wiskunde-onderwijs (1)

Thema's voor een nascholingscursus

Douwe Kok

Inleiding

Computers kunnen een belangrijke rol in het wiskunde-onderwijs spelen en zullen dat in de toekomst ook zeker gaan doen. In Nederland begint, met name onder invloed van het NIVO-project, de verspreiding van de computers over de verschillende scholen een zekere omvang te krijgen. Voeg dit bij het gegeven dat al deze computers werken onder MS-DOS, een voor de ontwikkeling van software stimulerende omstandigheid, en een gematigd optimisme t.a.v. computer-gebruik in de klas is op zijn plaats.

Het gebruik van de computer in de klas kun je op verschillende manieren benaderen. Ik noem er twee.

a De computer als hulpmiddel om knelpunten in het wiskunde-onderwijs aan te pakken. Gedacht kan dan worden aan:
- leren werken met variabelen
- leren werken met functie-voorstellingen waarin een parameter voorkomt;
- koppelen van het begrip afgeleide aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van een functie;
- het maken van een voorstelling van ruimtelijke figuren.

b De computer die door zijn nieuwe mogelijkheden tot nu toe ontoegankelijke wiskundige onderwerpen binnen het bereik van de middelbare schoolwiskunde brengt of de kans biedt bekende stof op een veel realistischer wijze te presenteren.

Men kan hierbij denken aan:
- verwerken van een omvangrijke hoeveelheid statistische gegevens;
- manipuleren met grote matrices;
- oplossen van differentiaal-vergelijkingen;
- met numerieke methoden oplossen van vergelijkingen en uitrekenen van integralen.

Er verschijnen krachtige programma's waarmee allerlei technische problemen kunnen worden opgelost. Niet alleen kunnen met de computer allerlei integralen numeriek worden berekend. Er zijn nu ook al programma's die bijvoorbeeld de primitieve van $f(x) = 1/\sin x$ kunnen bepalen. Programma's dus die met formules kunnen rekenen. Daarmee dringt de vraag zich op welke rol technische vaardigheden in ons onderwijs nog moeten spelen. Deze vraag hoeft nu nog niet beantwoord te worden, maar haar ontlopen is niet goed meer mogelijk.

In opdracht van NIVO heeft een groepje mensen (Guido Bakema, Piet van Blokland, Hans Krabbendam, Heleen Verhage en ik) een aantal thema's onderscheiden die bij elkaar een overzicht bieden van mogelijk zinvol computer-gebruik in het wiskunde-onderwijs[1]. We kwamen tot de volgende lijst:

Functies en grafieken
Voortgezet rekenen
Statistiek en kansberekening
Meetkunde
Shortliners
Spreadsheet
Simulatie
Computer-algebra
Matrix-rekening en besliskunde.

In dit artikel zal ik de eerste drie thema's kort bespreken. Daarbij baseer ik me sterk op de tekst van het Raamplan NIVO-nascholing wiskunde, die geschreven is door de hierboven genoemde personen. In het volgende nummer van *Euclides* ga ik op de overige onderwerpen nader in.

1 Functies en grafieken

De functielijn is een van de belangrijkste leerstoflijnen binnen het vak wiskunde in het voortgezet

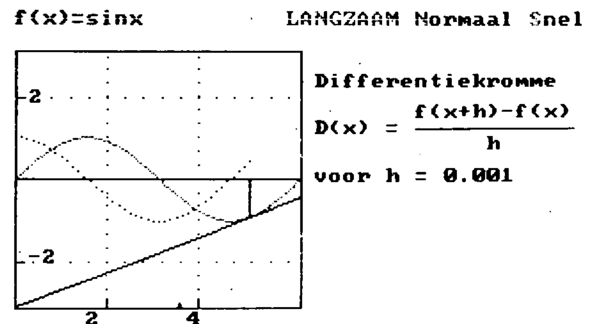
onderwijs. Op deze lijn bevinden zich heel wat punten die een zorgvuldig doordacht leerproces nodig maken, willen leerlingen de aan de orde zijnde begrippen en inzichten zich eigen kunnen maken. In sommige van deze (knel-)punten kan het benutten van computer-programmatuur het leerproces soepeler en meer doeltreffend doen verlopen. Het zijn vooral de grafische mogelijkheden van de computer die in deze programma's gebruikt worden.
We kunnen hier twee soorten software onderscheiden.
- Software die leerlingen stimuleert kwalitatief met grafieken om te gaan.
- Software die dienst kan doen als een stuk gereedschap in het analyse-onderwijs.

In de onderbouw van het voortgezet onderwijs is het belangrijk dat de leerling een juist begrip van grafieken opbouwt. Mede met het oog op de toepassingsgerichte wiskunde in de bovenbouw is het dynamische aspect van grafieken essentieel. De volgende, door de SLO ontwikkelde software richt zich met name op het ondersteunen van dit aspect.
- Het programma 'Badkuip'[2] laat de leerlingen zelf grafieken opbouwen.
- Het programma 'Flesvuller' gaat over de relatie tussen de vorm van een fles en de daarbij behorende 'vul'-grafiek.

Het is de bedoeling dat deze software binnenkort ook voor de MS-DOS-computers beschikbaar komt.
In Engeland zijn er voor de BBC-computer soortgelijke programma's gemaakt. We noemen hier alleen 'Traffic'. De autoweg is hier de context waarbinnen leerlingen een goed begrip van tijd-afstand-grafieken kunnen ontwikkelen. Ook van dit programma is een MS-DOS-versie in aantocht.

Het aan de Vrije Universiteit ontwikkelde programma VU-grafiek[3] is een krachtig functiepakket en daarmee een breed inzetbaar hulpmiddel bij het analyse onderwijs. Diverse knelpunten kunnen ermee aangepakt worden.
We noemen er enkele:
- Herkennen van de essentiële punten in de grafiek.
- Ontwikkelen van het begrip 'afgeleide functie'.
- Op intuïtieve wijze onderzoeken of een limiet bestaat.
- Onderzoeken van 'families van functies'.
- Inzoomen op details van de grafiek versus uitzoomen naar een globaal overzicht.
- Met numerieke methoden een snijpunt bepalen.

Een voorbeeld. De afgeleide van $f(x) = \sin x$ (figuur 1).
Het programma rekent bijvoorbeeld voor veel waarden van x de helling van de grafiek van $\sin x$ uit.
Vervolgens ziet de leerling de raaklijn langs de grafiek schieten en voor zijn ogen ontstaat de grafiek van de hellingfunctie. Nu kan de leerling een vermoeden uitspreken over het functievoorschrift van de afgeleide en dat vermoeden intypen. Bij dat functievoorschrift wordt de grafiek getekend en de leerling kan nagaan of die grafiek (praktisch) samenvalt met die van de hellinggrafiek.



Figuur 1

2 Voortgezet rekenen en algebra

In het onderbouwprogramma van het voortgezet onderwijs krijgen rekenactiviteiten – noodgedwongen – een steeds groter accent. De computer heeft enkele specifieke eigenschappen die bij dit voortgezet rekenonderwijs van dienst kunnen zijn. We noemen:
- De mogelijkheid tot visualisering van rekenoperaties.
- De mogelijkheid om de leerling onmiddellijk feedback te geven.
- De grafische mogelijkheden: het snel tekenen van roosters en 100-velden.

- Animatie. Leerlingen vinden het maken van rijtjes opgaven vaak vervelend. Computer-spelletjes bieden een motiverende omgeving, waarbinnen leerlingen misschien tot extra oefening verleid kunnen worden.

Ook de rekenmachine is in dit verband belangrijk. Vroeger moest de leerling beschikken over de combinatie 'rekenen met tafels – pen en papier – kennis van de rekenalgoritmen' om de gemiddelde rekenopgave te kunnen maken. Tegenwoordig volstaat de combinatie 'rekenen met tafels – rekenmachine'. Het is nuttig te beseffen dat hier slechts sprake is van een verandering in technologisch opzicht, die overigens wel zijn consequenties heeft voor de dagelijkse onderwijspraktijk.

Het NIVO-OMO-SCO-project heeft o.a. het programma 'Schatten" opgeleverd, dat er veelbelovend uitziet.
Een ander programma dat belangrijk lijkt, is van Joost Klep, werkzaam bij de SLO. Het draagt de naam 'Een wereld rond tafels'. Hier kan de leerling zelf kiezen volgens welk model hij de tafelsommen wil benaderen: getallenlijn, stroken, rechthoekmodel of groepjes. Met name dit aspect is veel belovend, nl. omdat de leerling zijn benadering hier niet hoeft in te leveren bij een alleen maar sturende computer.

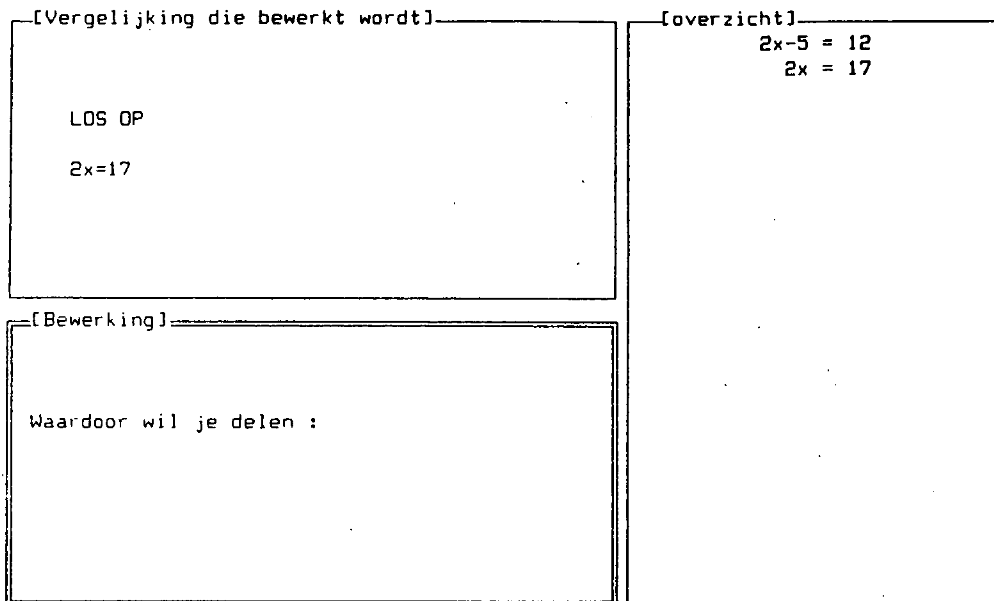
Er zijn nog erg weinig programma's die hulp kunnen bieden bij het algebra-onderwijs. We bedoelen nu niet 'drill and practice'-programma's, die zijn er wel, maar het gaat ons juist om programma's die gericht zijn op begripsvorming. Thomas en Tall hebben veelbelovende resultaten geboekt met een programma dat leerlingen hielp een goed variabelebegrip te ontwikkelen. We kennen van dit experiment alleen maar schriftelijke verslagen. Er is een programma, 'SOLVE' geheten, draaiend op de BBC, dat leerlingen zich bewust maakt hoe het oplossen van vergelijkingen in zijn werk gaat. Ons zijn van dit programma geen klasse-ervaringen bekend. Leraren-intuïtie bracht ons er toe dit programma de moeite van het uitproberen waard te achten. Met name ook omdat er voor de onderbouw van het voortgezet onderwijs zo weinig software is, waarmee leerlingen op een inzichtelijke manier vaardigheden kunnen verwerven, hebben we binnen mijn vakgroep op de VU besloten een dergelijk pakket voor MS-DOS-machines te maken. We hebben het voorlopig 'Los-op' genoemd.
Een onderdeel van 'Los-op' gaat zo:
De leerling kan een vergelijking intypen.
Bijvoorbeeld $2x\text{-}5 = 12$
Er wordt nu gevraagd een actie te ondernemen om deze vergelijking eenvoudiger te maken. Hij/zij kan kiezen uit:
- optellen
- aftrekken
- vermenigvuldigen
- delen
- uitwerken

Nadat gekozen is voor, laten we zeggen, optellen, vraagt de computer 'Wat wil je optellen?'. De leerling zegt: 5. De computer: 'Wat is dan het resultaat?'. Enzovoort. Bij elke stap controleert het programma op rekentechnische fouten. Is een stap goed uitgevoerd dan wordt de nieuwe vergelijking opgenomen in het overzicht. Als uiteindelijk $x = 8.5$ verschijnt, dan reageert de computer met 'Ok'. U ziet een zgn. 'screendump' (figuur 2), ook om u een idee te geven van het scherm tijdens het werken met deze opgave.

3 Statistiek en kansrekening

In het onderbouwprogramma hebben kansrekening en statistiek altijd een bescheiden plaats ingenomen. Ondanks het feit dat deze onderwerpen voor een algemene vorming erg belangrijk zijn. Veel verder dan het bepalen van modus en mediaan van eenvoudige getallenreeksen kwam men niet. Spreidingsmaten kwamen al helemaal niet aan bod. Bovendien bleek uit incidentele experimenten, o.a. die van het IOWO dat voor veel leerlingen het kansbegrip heel moeilijk was.

Deze situatie is de laatste tijd wat aan het veranderen. In het nieuwe wiskunde-A programma voor het VWO vormen statistiek en kansrekening een belangrijk onderdeel. Bovendien is geprobeerd de statistiek wat meer uit te werken in de richting van het kritisch kijken naar en interpreteren van langs statistische weg verkregen gegevens. Voor het nieu-



Figuur 2 Screendump

we havo-programma lijkt een soortgelijke ontwikkeling waarschijnlijk.

De computer kan bij deze ontwikkelingen een belangrijke ondersteunende rol vervullen. Het altijd zo omvangrijke rekenwerk kan worden geautomatiseerd. De bijvoorbeeld uit enquêtes verkregen gegevens kan men door de computer laten verwerken. De resultaten kunnen gepresenteerd worden via:

- frequentietabellen en histogrammen;
- puntenwolken en regressielijnen;
- kruistabellen.

In het onderwijs kan het accent meer komen te liggen op het formuleren van vermoedens en het interpreteren en controleren van door computerverwerking verkregen resultaten.

Piet van Blokland schreef enige tijd geleden in dit blad over Statistiek en computers[4]. Hij besprak in dat artikel ook zijn programma VU-stat. Dit is een statistisch pakket waarmee enquêtes kunnen worden ingevoerd en verwerkt. In de praktijk bleken leerlingen van havo-3 in staat zelf kleine onderzoekjes op te zetten en die met het pakket te verwerken.

Men kan de computer ook gebruiken om aan gegevens voor statistisch onderzoek te komen. In het programma 'TIMES' (draaiend op de BBC, onderdeel van 'Teaching with a micro', math 3) bepaalt de micro de reactie-snelheid van de gebruiker op bijvoorbeeld het in beeld verschijnen van een bepaalde letter. Die tijden kunnen vervolgens statistisch onderzocht worden.
Een veel gebruikte mogelijkheid van de computer is het via de zgn. 'randomgenerator' simuleren van kans-spelen. De wet van de grote getallen kan zo gecontroleerd worden. Maar ook eenvoudiger gebruik is denkbaar. Men kan met de computer het gooien met munten of dobbelstenen simuleren en de resultaten heel snel en overzichtelijk rangschikken.

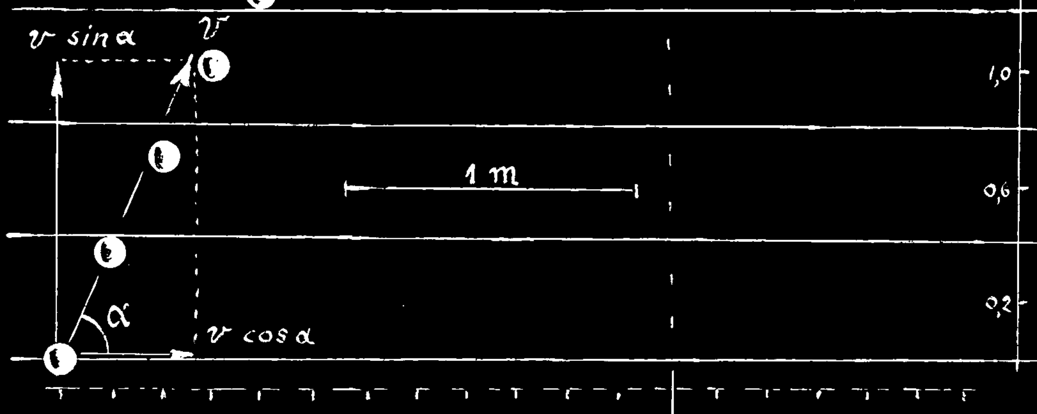
NIVO-nascholing

In de cursus 1987/88 zal de werkgroep materiaal ontwikkelen dat als basis zal dienen voor de vakgerichte NIVO-nascholing die in de cursus 1988/89 van start zal gaan.
Een door ons aangelegde lijst met software kan bij mij worden aangevraagd. Op deze lijst staat aangegeven welke software met de NIVO-coupon kan worden betaald.

Sport en wiskunde

3 Worp, slag en stoot

Henk Mulder



figuur 1 Opgeworpen bal en schuin weggeschoten bal met dezelfde verticale beginsnelheid (stroboscopisch belicht)

In een vorig nummer hebben we door numerieke differentiatie een analyse gemaakt van de beenbeweging van een voetballer. Nu willen we de baan van het schot onderzoeken. Het betreft een merkwaardige kromme die we niet alleen op het voetbalveld tegenkomen, maar ook op de tennisbaan en de pingpongtafel. Bij de hoog- en verspringer, bij de speer- en discuswerper, bij de kogelstoter en de kogelslingeraar. Deze kromme is voor de sport wel erg essentieel. U vermoedt natuurlijk al dat het om de parabool gaat. Het Griekse woord parabool betekent trouwens ook werpkromme!
Wellicht ziet u bij een weggeslagen cricketbal de paraboolbaan nog wel zitten, maar hoe zit het bij een springend paard? Wel, als u daar de baan van het zwaartepunt volgt, komt u weer op dezelfde kromme uit.

Experiment
Om meer inzicht in dit soort bewegingen te krijgen, doen we een experiment (figuur 1). Een wit geverfde hockeybal wordt schuin omhooggeschoten en daarbij worden verschillende posities met constante tussentijden gefilmd. Hoewel, het kan ook met een geopende camera, waarbij het object met constante tijdsverschillen kort en sterk belicht wordt. Die lichtflitser heet een stroboscoop; u vindt ze tegenwoordig zelfs in de disco. De frequentie van de lichtpulsen is instelbaar. Bij een zekere frequentie zijn zo 19 standen gefixeerd.

Twee componenten
De beweging heeft twee componenten: één in de x-richting, één in de y-richting.

Als we de oorsprong als startpunt kiezen, zien we de x-waarden lineair toenemen. De streepjesverdeling langs de x-as correspondeert met de x-coördinaten van de balposities. De horizontale snelheid is constant $v \cos \alpha$, waarbij de vector v de snelheid in het startpunt is, rakend aan de kromme.
In verticale richting loopt de snelheid gelijkmatig terug, totdat deze in het toppunt nul is geworden. Aan de linkerzijde van figuur 1 zijn die y-waarden verzameld. Ze komen precies overeen met die van een bal die met een beginsnelheid $v \sin \alpha$ verticaal omhoog wordt geworpen. Zo blijkt hoe beide bewegingscomponenten onafhankelijk van elkaar zijn.

Bewegingsformules
De uitwijking in de x-richting is evenredig met de tijd t.

$$x = (v \cos \alpha) \cdot t \qquad (1)$$

In verticale richting loopt de beginsnelheid $v \sin \alpha$ per tijdseenheid met een vast bedrag terug. Deze vertraging heeft het symbool g (gravitatie) en is af te ronden op $10\,\text{m/s}^2$.
De verticale snelheid neemt zodoende lineair met de tijd t af, volgens:

$$v(t) = v \sin \alpha - gt \qquad (2)$$

Elke seconde vermindert de verticaal gerichte snelheid dus met een bedrag van $10\,\text{m/s}$.
Voor de omhoog gerichte verplaatsing geldt dan:

$$y = (v \sin \alpha) \cdot t - \tfrac{1}{2}gt^2 \qquad (3)$$

Dit is gemakkelijk na te gaan door het rechterlid te differentiëren, immers de snelheid is de afgeleide van de verplaatsing ofwel $v = \dfrac{dy}{dt}$.

Parabool
Dat de werpkromme een parabool zou zijn, is nu gemakkelijk te bewijzen, door uit (1) en (3) de tijd t te elimineren.

$$t = \frac{x}{v \cos\alpha} \text{ dus}$$

$$y = (v \sin \alpha) \cdot \frac{x}{v \cos\alpha} - \tfrac{1}{2}g\left(\frac{x}{v \cos\alpha}\right)^2$$

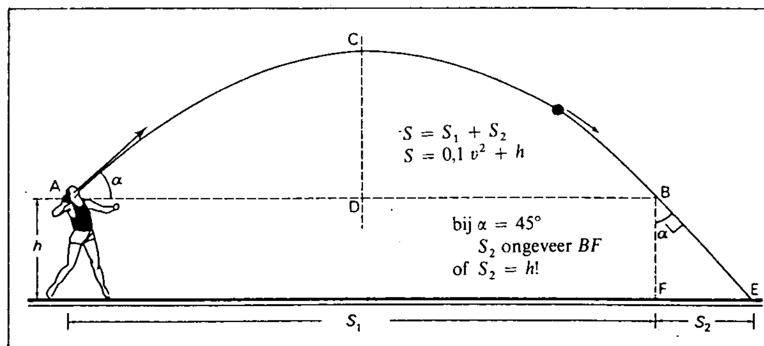
$$\text{of } y = -\left(\frac{g}{2v^2 \cos^2 \alpha}\right)x^2 + (\tan \alpha)x \qquad (4)$$

Tijdsduur, hoogte en wijdte van slag of worp
De tijd om vanaf het startmoment de top van de kromme te bereiken, stellen we T. Omdat de tweede helft van de parabool in plaats en tijd symmetrisch is met de eerste helft, zal de tijd voor de hele slag of worp, veronderstellend dat we op dezelfde hoogte eindigen, $2T$ zijn.
Uit (2) volgt: $0 = v \sin \alpha - gT$

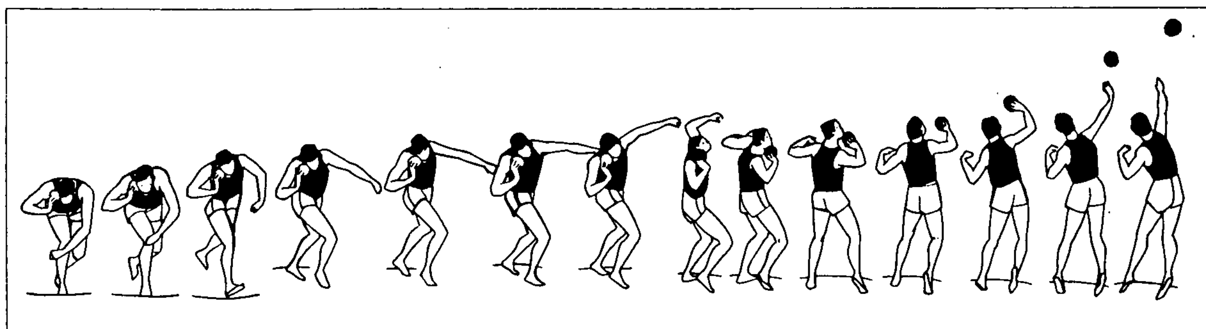
$$\text{ofwel } T = \frac{v \sin\alpha}{g} \qquad (5)$$

Hoe hoog is de bal op dat moment?
Uit (3) volgt: $y = (v \sin \alpha) \cdot \dfrac{v \sin\alpha}{g} - \tfrac{1}{2}g\left(\dfrac{v \sin\alpha}{g}\right)^2$
zodat de grootste hoogte wordt:

$$y_{\max} = \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{2g} \qquad (6)$$



figuur 2 De stootkromme



Horizontaal is dan volgens (1) een afstand afgelegd:

$$x = (v \cos \alpha) \cdot \frac{v \sin \alpha}{g}$$

waaruit volgt dat wat in oorlogstijd wel de schotsafstand heet en in vredestijd de worpwijdte, een dubbele grootte heeft:

$$x_{max} = \frac{2v^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g} \qquad (7)$$

Zo hoog of zo ver mogelijk?

Een hoog-springer wil zo hoog mogelijk komen, een verspringer zo ver mogelijk. Waar hangen domein en bereik vanaf, want zo heet dat toch officieel? Wel, van twee zaken: de startsnelheid v en de starthoek α. We kunnen ook zeggen: van de startsnelheid en grootte in richting.

Uit (6) volgt dat je bij gegeven v zo hoog mogelijk komt als je zo snel mogelijk afzet en recht omhoog ($\alpha = 90°$). U kunt het thuis in de tuin uitstekend met een tuinslang uitproberen. Onder welke hoek spuit het water het verst?

Uit (7) volgt dat het maximum ligt bij $\sin 2\alpha = 1$ of $\alpha = 45°$.

Bij starthoek 45° wordt $x_{max} = \frac{v^2}{g}$
(volgend uit 7) (8)

en $y_{max} = \frac{v^2}{4g}$ (volgend uit 6) (9)

We komen dan juist vier keer zo ver als hoog!

De vergelijking van deze ideale bergparabool wordt dan:

$$y = \frac{g}{v^2} x^2 + x \text{ (zie 4)} \qquad (10)$$

Merk op dat in de formules voor ver en hoog de snelheid in het kwadraat staat. Zo kunnen we bij een uitstootsnelheid van 7 m/s ongeveer 5 m ver komen, maar bij 14 m/s wel 20 m!

De waarde van g verschilt op aarde op verschillende plaatsen. Tussen pool en evenaar is dat 0,5%. Dat kan op 20 m dus al 10 cm schelen (zie formules 8 en 9). Over atletiekwedstrijden tussen Russen en Amerikanen op de maan, waar g zes keer zo klein is als op aarde, zullen we het maar niet hebben.

We kunnen, omdat g af te ronden is op 10, formule (8) benaderen met: $x_{max} = 0{,}1\, v^2$.

Vaak is de werpkromme niet-symmetrisch, omdat bijvoorbeeld bij het kogelstoten van een beginhoogte h (zie figuur 2) vertrokken wordt. Hoe hoger h, hoe verder we komen. Een lange atleet is hier dus in het voordeel.

Bij een uitstoothoek van 45° wordt de raaklijn aan de kromme in B ook 45°. Als we het laatste stuk vrijwel recht stellen, moeten we voor de totale afstand ... ongeveer de beginhoogte h bijtellen.

Het betekent ook: een atleet die 4 cm langer is, komt ook 4 cm verder!

Voor de totale afstand komen we dan tot de benadering:

$$x_{max} = 0{,}1\, v^2 + h \qquad (11)$$

Zelf meten en rekenen

Als u meent de werpparabool voldoende onder 'de knie' te hebben, kunt u nog eens wat meten en rekenen aan figuur 1. De schaal kunt u aflezen. De horizontale witte koorden zijn gespannen op onderlinge afstanden van 40 cm.

Gevraagd: de beginsnelheid v en de frequentie van de flitser. De oplossing volgt hierna.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

590. Exponentiële groei kan beschreven worden door middel van iteratie van de functie $x \to (1 + r)x$ $(r > 0)$. Na n perioden is de beginwaarde x_0 dan aangegroeid tot $(1 + r)^n x_0$. In de praktijk kan dit naderen tot oneindig niet grenzeloos doorgaan en zal aftopping plaats hebben. Verhulst heeft reeds in 1845 een correctie ontworpen waardoor deze aftopping bewerkstelligd wordt. Deze correctie luidt:

$$x \to (1 + r)x - \frac{r}{p}x^2$$

Als r geen al te grote waarden aanneemt (kleiner dan 2 blijft), zal de functiewaarde op den duur naderen tot p. Voor grotere waarden van r verloopt het proces anders. In onderstaande twee figuren ziet men hoe het proces verloopt voor $r = 1{,}8$ en voor $r = 2{,}3$.

Onderzoek hoe het verloop van het proces van r afhangt. Mogelijk is stijgend tot p naderen, oscillerend tot p naderen, blijven oscilleren tussen twee waarden; terwijl het ook nog de moeite loont na te gaan wat er gebeurt als $r > 3$.
Raad: verricht dit onderzoek door gebruik te maken van de grafiek van $y = (1 + r)x - \frac{r}{p}x^2$.
Gaarne ontvang ik aan bovenstaand adres binnen een maand uw bevindingen. Publikatie volgt daarna.
(De figuren zijn overgenomen uit de catalogus van de tentoonstelling Schönheit im Chaos (Universität Bremen).

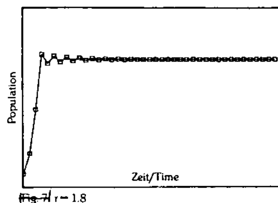


Fig 7 r = 1.8

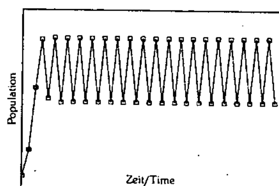
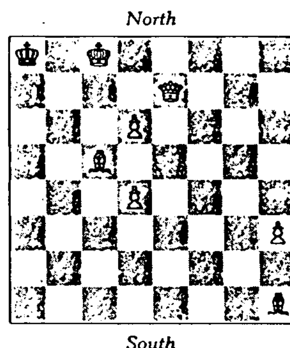


Fig 8 r = 2.3

Oplossingen

North



South

585.

Bovenstaande stand is op legale manier ontstaan. Gevraagd wordt wie wit en wie zwart is.
In **584** hebben we reeds gezien dat North wit kan zijn. Nu de pion niet meer op e5 staat maar op d6 is er een tweede mogelijkheid: ook South kan wit zijn. De voorgaande zetten zijn dan geweest:

La3-c5 (of b4-c5) schaak	Ka7-a8
e4-e5 schaak	d7-d5
e5 × d6 ep schaak	

(de witte pion op e5 slaat dus en passant de zwarte pion, die van d7 naar d5 gegaan is).
Goede oplossingen ontving ik van A. M. Koldijk, J. Cuppen en B. Kootstra.

Rectificatie

In de oplossing van **580** staan een aantal foute beweringen. Er moet staan:
Het aantal manieren waarop het mogelijk is $a - p$ te verdelen in $b + 1$ getallen (waaronder getallen 0 mogen voorkomen), is $\binom{a - p + b}{b}$. In totaal krijgen we dus

$$\sum_{p=0}^{b} \binom{a - p + b}{b}\binom{a - p + b}{b} \text{ manieren.}$$

Korrel

H. Bolt

Hond pakt fietser... of niet?
Het bijzonder aardige doch hondse probleem van Henk Mulder (Euclides 1 van deze jaargang) zal velen aanleiding geven om te reageren. Daarmee voldoet de start van deze nieuwe jaargang aan de wens van de redactie (blz. 1).
De getekende grafiek van de door Mulder gevonden relatie geldt door $k = 0{,}8$. Maar voor het gemak geldt in het beginpunt (hond staat stil) dat $k = 0$. Het komt inderdaad mooi uit aangezien ervan wordt uitgegaan dat de kromme door (0,1) gaat. Waarom? Omdat de hond daar ligt te loeren? Gun de hond, net als de fietser, een vliegende start. Dat betekent dat de hond al enige tijd langs de y-as rent (met de constante snelheid v_2). Dan is het niet meer zo voor de hand liggend dat (0,1) als punt van de kromme wordt gekozen. Waarom niet (0,2)?
Het antwoord is duidelijk: dan wordt de relatie (3) een gedrocht.
Zeker: de hond pakt de fietser. Maar niet in het berekende punt, of misschien ook wel.
De hond zal op zeker moment de kop opzij werpen en de tanden in Mulders broekspijp zetten, zoals de hardloper zich met kin of borst naar voren over de finishlijn werpt.

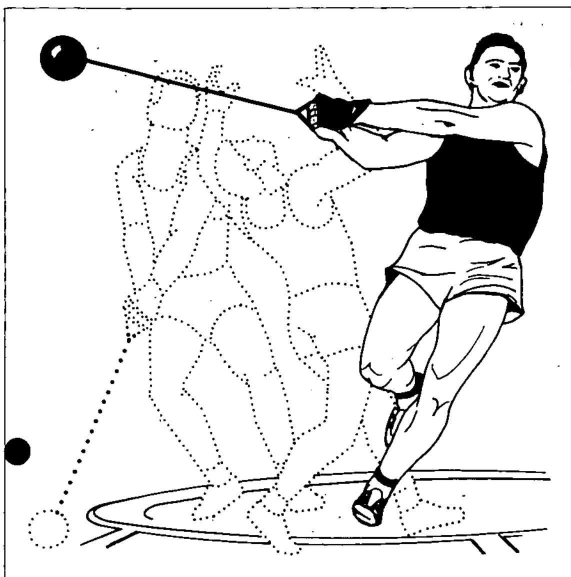
Desondanks: het is een aardig probleem.
Het geeft ook een aardig idee van wat wiskunde-A voorstelt. Natuurkundigen en economen doen het al lang op deze manier en waarom de wiskundigen dan niet?
Het is ook, zoals Mulder schrijft, een voorbeeld hoe technici met wiskundige notaties omspringen. Ik lees in zijn verhaal eigenlijk géén wiskundige notaties. Of bedoelt de technicus met 'of' dat er een gelijkwaardigheid wordt genoteerd? Of is $y' = \infty$ de uitdagende stunt? Ik vraag mij af hoe Mulder het symbool ∞ (waarvan hij zelf slachtoffer is geworden) uitspreekt. Is het een getal? Of een veranderlijke? Overigens is het ook voor wiskundigen geen vies ding.

Oproep

van de redactie van Euclides

Aan het einde van deze jaargang zullen twee leden de redactie van Euclides verlaten. Daarom zoeken wij versterking. Onze gedachten gaan uit naar enthousiaste wiskundedocenten (m/v) die met ons willen werken aan de verdere ontwikkeling van het vakblad voor de Nederlandse Wiskundeleraar (m/v). Gebieden die bijzondere aandacht vragen van nieuwe medewerkers zijn:
- vrouwen en wiskunde
- informatica

Wie er voor voelt tot de redactie toe te treden of nadere inlichtingen wil, kan contact opnemen met de voorzitter: Auke Oosten, Elzenlaan 34, 9321 GN Peize, tel. 05908-3 22 03.



Oplossing werpparabool

De starthoek is 66°. De schaal voor de snelheidsvector is onbekend. De y-coördinaat van het hoogste punt ligt op 2,35 m.
Uit (6) is nu allereerst v te bepalen. Immers $y_{max} = \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{2g}$ of $v^2 = \frac{2{,}3 \times 20}{(0{,}914)^2}$ ofwel $v = 7{,}4$ m/s.
Uit (5) volgt de waarde van T. Immers $T = \frac{v \sin\alpha}{g} = 0{,}68$ s. In die tijd heeft de stroboscoop 13 belichtingen gegeven, zodat het tijdsverschil tussen twee flitsen 0,68 : 12 of 0,057 s wordt. De flitsfrequentie heeft dus de omgekeerde waarde ofwel 17,5 Hz (hertz).

Noot van de redactie

Naar wij vernamen heeft Ir. H. M. Mulder in december 1987 de Minnaert-prijs in ontvangst mogen nemen, voor zijn vele publikaties op het gebied van de natuurwetenschappen.
Wij wensen de heer Mulder van harte geluk met deze onderscheiding!

Boekbespreking

Vriendelijke Wiskunde

Dit boekje is een uitgave van de werkgroep Vrouwen en Wiskunde ter gelegenheid van de eerste lustrumdag van de werkgroep op 21 maart 1987. Het bevat o.a. de lezingen op die dag gehouden en een greep uit de werkpakketjes, gemaakt door leden van de werkgroep en geschikt om in zeer heterogene gezelschappen te gebruiken. Ze zijn dan ook te bestellen.
Het boekje is enerzijds een verslag van en een reflectie op twintig jaar wiskunde-onderwijs, zoals dat is gegeven en bij (zeer veel) meisjes is overgekomen, anderzijds een praktische aanmoediging tot wiskunde bedrijven.
De schrijfsters zijn m.i. in hun opzet goed geslaagd. Uit hun persoonlijke, reële ervaring geven zij een historisch getrouw beeld en trekken daar hun lering uit. Zonder er de nadruk op te leggen valt te lezen hóevéél werk er verzet is en wordt om een mentaliteitsombuiging teweeg te brengen en een plezieriger beeld van wiskunde te scheppen, zodat meer meisjes, in hun eigen belang, meer exact (zullen) kiezen of daartoe aangemoedigd (zullen) worden.
Dit boekje verdient dus een brede lezerskring, ook al is men het niet altijd met de stellingname eens. Kennelijk is het nodig (geweest) zaken zwart-wit te stellen om uiteindelijk tot de uitgekristalliseerde houding die uit dit boekje spreekt te komen.
Het is uiterst prettig leesbaar voor lezers van beiderlei kunne van alle leeftijden. De voorbeelden zijn zo gekozen dat men al lezend de opgaven meteen maakt en de verzorgde uitvoering biedt daar met zijn brede marges alle gelegenheid toe.
De titel dekt de lading.

H. Susijn

Van de bestuurstafel . . .

Luuk Jacobs

Nadat Leen Bozuwa in Euclides nr. 6 afscheid van u genomen heeft als schrijver van deze rubriek is het nu mijn beurt u op de hoogte te houden van de belangrijkste zaken waar het bestuur van onze vereniging mee bezig is. Het heeft geen zin u een uittreksel van de notulen voor te schotelen, omdat er veel geregeld moet worden op de bestuursvergaderingen. Denkt u maar aan het organiseren van de examenbesprekingen, het organiseren van de ledenvergadering/studiedag, het bespreken van de bestuurswisseling. Inhoudelijk heeft het bestuur veel tijd gestoken in het bespreken van de ontwikkelingen binnen het wiskundeonderwijs. Ik kan u het volgende melden:

COW: Commissie Onderbouw Wiskunde

De activiteiten van de commissie zijn in augustus 1987 van start gegaan. In dit eerste jaar staat het inspelen van het ontwikkelingsteam centraal. De activiteiten zijn o.a.: studie, observaties, ontwerpen, uitproberen van materialen, overleggen met docenten, auteurs e.a. In juni a.s. zal de COW een voorlopig raamplan klaarhebben. Het volgend cursusjaar start het experiment in volle hevigheid. Vanwege het grote belang van dit project zal op de studiedag in oktober a.s. het COW een aantal werkgroepen organiseren. U kunt dit jaar dus de studiedag niet missen! Heeft u de datum al genoteerd?
Zaterdag 29 oktober 1988 in het Nieuwe Lyceum te Bilthoven.

Mededeling

De internationale groep TME (Theory of Mathematics Education) organiseert van 11 tot 15 juli 1988 een congres in de U.I.A. (Universitaire Instelling Antwerpen) met als titel:
Investigating and bridging the teaching-learning gap.
Voorzitter: prof. A. Vermandel, Universiteit Antwerpen.
Mede-voorzitter: prof. H. G. Steiner, Universiteit van Bielefeld-F.R.G.

De inhoud van het congres wordt gekenmerkt door de volgende onderwerpen:

1. The teaching-learning gap in the real process in the mathematics classroom as a traditional phenomenon and as a very crucial present problem. Recent research findings. Co-ordinator: G. Brousseau, Université de Bordeaux, France.
2. The gap between research on teaching and research on learning. Co-ordinator: K. Hasemann, University Hannover, F.R.G.
   Models for designing teaching in the light of research on learning. Co-ordinator: A. W. Bell, University of Nottingham, Great-Britain.
4. The need for theory and research in developmental work and projects and their position in the teaching-learning research context. Co-ordinator: H. Burkhardt, University of Nottingham, Great-Britain.
5. The role of content, subject area orientation and different views of mathematics in studying and bridging the teaching-learning gap and developing integrative models. Co-ordinator: L. Bazzini, University of Pavia, Italy.
6. The teaching and learning gap in the light of studies on classroom processes and social interaction. Co-ordinator: G. Krummheuer, I.D.M., Bielefeld, F.R.G.
7. Implication of the conference theme on teacher education. N. Krumholtz, Technion Haïfa, Israel.
8. Computer as a third component in the teaching learning-interaction. D. Tall, University of Warwick, Great-Britain.

Plenaire voordrachten:
'Investigating and bridging the teaching-learning gap: some basic issues related to the conference theme'. H. G. Steiner – I.D.M., Bielefeld, F.R.Germany.
'The student-learner gap'. Y. Chevallard – Université de Marseille – France.
'Software to think with in mathematics education'.
J. Schwartz – Harvard University, Mass. – U.S.A.
'The teaching-learning situation as a social interaction'.
J. Voigt – I.D.M., Bielefeld – F.R.Germany.
'Know thyself, know the computer'. G. Papy – Universite Libre de Bruxelles – Belgium.

Voor verdere inlichtingen:
M. Vansteenkiste, Universiteit Antwerpen – Departement Didaktiek en Kritiek, Universiteitsplein 1, 2610 Wilrijk, Tel.: 03/828.25.28, toestel 194 of 117.

Kalender

27 juli-3 aug. 1988: Budapest, ICME-Congres
29 oktober 1988: Bilthoven, Jaarvergadering/Studiedag NVvW

Inhoud

Adressen van auteurs

Truus Dekker, Grote Molensteeg 1, 1135 XL Edam

W. H. V. de Goede, Rusthoven 4, 9301 TD Roden

S. L. Kemme, R.U. Groningen, Subfaculteit Wiskunde en Informatica, Postbus 800, 9700 AV Groningen.

D. Kok, V.U. Faculteit Wiskunde en Informatica, Vakgroep Didaktiek, De Boelelaan 1081, 1081 HV Amsterdam

Ir. H. M. M. Mulder, Geersbroekseweg 27, 4851 RD Ulvenhout

A. van der Wal. Ordermolenweg 23, 7312 SC Apeldoorn

Sylvia van der Werf, Amstelkade 63", 1078 AK Amsterdam